

colorchecker CLASSIC



x-rite



A

3.



Mécanique rationnelle

Cours de M. Appell  
à la Faculté des Sciences  
1891-1892.

3<sup>e</sup> cahier Louis Couturat

Papeterie Générale des Écoles, 80, Boul. St-Germain



MS 121



*Cours de Mécanique rationnelle*  
*professé par M. Appell*  
*à la Faculté des sciences*  
*1891 - 1892.*

*III.*



## Table.

### Dynamique du point matériel (suite.)

— Théorème de Jacobi	page 1.
— Principes de la méthode de l'action, de Hamilton	16.
Mouvement d'un point soumis à des liaisons	23.
Pendule simple	26.
Pendule cycloïdal	34.
Pendule sphérique	60.
Mouvement relatif	69.
Pendule de Foucault	82.

### Dynamique des systèmes.

Moments d'inertie	89.
Théorèmes fondamentaux	102.
Mouvement d'un corps solide autour d'un axe fixe:	
(Pendule composé)	123.
Mouvement d'une chaîne glissant sur une courbe	133.
Mouvement d'un corps parallèlement à un plan	138.



## Dynamique du point m: Equations canoniques.

Nous avons mis les équations du mouvement sous la forme canonique de Hamilton (dans le cas d'une fonction des forces):

$$(1) \quad \frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_1} \quad \frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_2} \quad \frac{dq_3}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_3}$$

$$(2) \quad \frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_1} \quad \frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_2} \quad \frac{dp_3}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_3}$$

En résolvant ce système de 6 équations différentielles du 1<sup>er</sup> ordre, on obtiendrait les expressions finies de:  $q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3$  en fonction de  $t$  et de 6 constantes:  $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ .

Théorème de Jacobi. L'intégration des équations de Hamilton ramène à la recherche d'une intégrale complète de l'équation aux dérivées partielles:

$$(3) \quad \frac{\partial V}{\partial t} + H(q_1, q_2, q_3, \frac{\partial V}{\partial q_1}, \frac{\partial V}{\partial q_2}, \frac{\partial V}{\partial q_3}, t) = 0$$

où l'on a remplacé  $p_1, p_2, p_3$  dans  $H$  par les dérivées  $\frac{\partial V}{\partial q_1}, \frac{\partial V}{\partial q_2}, \frac{\partial V}{\partial q_3}$ , et où  $q_1, q_2, q_3, t$  sont les variables indépendantes.

Cette équation définit une fonction  $V$  de  $q_1, q_2, q_3, t$ . Une intégrale complète de cette équation est une solution qui contient autant de constantes arbitraires qu'il y a de variables indépendantes; de sorte qu'en éliminant ces constantes, on retrouve l'équation aux dérivées partielles. — Dans le cas présent, on doit avoir 4 constantes arbitraires; mais comme  $V$  ne figure pas dans l'équation,



2  
 Elle n'est déterminée qu'à une constante près, de sorte que  $(V + C^t)$  vérifierait aussi l'équation. Il suffit donc, pour avoir une intégrale complète, de trouver une solution quelconque avec 3 constantes non additives, par exemple une fonction:  $V(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$  à laquelle il suffira d'ajouter une constante arbitraire pour avoir l'intégrale complète. — Nous ne nous occuperons qu des 3 constantes non additives:  $\alpha \beta \gamma$ . — Une fois connue la fonction  $V$ , on posera:

$$(4) \quad \frac{\partial V}{\partial \alpha} = \alpha' \quad \frac{\partial V}{\partial \beta} = \beta' \quad \frac{\partial V}{\partial \gamma} = \gamma' \quad (\alpha' \beta' \gamma' \text{ constantes})$$

$$(5) \quad p_1 = \frac{\partial V}{\partial q_1} \quad p_2 = \frac{\partial V}{\partial q_2} \quad p_3 = \frac{\partial V}{\partial q_3}$$

Ces 6 équations définissent en termes finis les 6 inconnus  $q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3$ . En effet, les équations (4) contiennent  $q_1, q_2, q_3$  et  $t$ : on pourra donc, en les résolvant, en tirer  $q_1, q_2, q_3$  en fonction de  $t$ , et des 6 constantes  $\alpha \beta \gamma$  (qui figurent dans  $V$ )  $\alpha' \beta' \gamma'$  (qui forment les seconds membres). — On portera ces valeurs de  $q_1, q_2, q_3$  dans les équations (5) et on en tirera immédiatement  $p_1, p_2, p_3$  en fonction de  $t$  et des 6 mêmes constantes. — Il s'agit de prouver que ces expressions de  $q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3$  sont les intégrales générales des équations canoniques (1) et (2), c'est-à-d. qu'elles vérifient identiquement ces 6 équations quelles que soient les 6 constantes arbitraires.

Et d'abord, il faut montrer que les valeurs de  $q_1, q_2, q_3$  tirées des équations (4) satisfont les équations (1). Pour avoir les dérivées  $\frac{dq_1}{dt}, \frac{dq_2}{dt}, \frac{dq_3}{dt}$ , il n'est pas besoin de résoudre les équations (4); il suffit d'appliquer le théorème des fonctions implicites.



Si on suppose qu'on les résolve et qu'on y reporte les valeurs obtenues pour  $q_1, q_2, q_3$ , elles deviendront des identités, leurs dérivées par rapport à  $t$  seront identiquement nulles; on a donc identiquement:

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha \partial q_1} \frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial V}{\partial \alpha \partial q_2} \frac{dq_2}{dt} + \frac{\partial V}{\partial \alpha \partial q_3} \frac{dq_3}{dt} + \frac{\partial V}{\partial \alpha \partial t} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial \beta \partial q_1} \frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial V}{\partial \beta \partial q_2} \frac{dq_2}{dt} + \frac{\partial V}{\partial \beta \partial q_3} \frac{dq_3}{dt} + \frac{\partial V}{\partial \beta \partial t} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial \gamma \partial q_1} \frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial V}{\partial \gamma \partial q_2} \frac{dq_2}{dt} + \frac{\partial V}{\partial \gamma \partial q_3} \frac{dq_3}{dt} + \frac{\partial V}{\partial \gamma \partial t} = 0$$

Ces 3 équations du 1<sup>er</sup> degré donneront  $\frac{dq_1}{dt}, \frac{dq_2}{dt}, \frac{dq_3}{dt}$ ; on pourrait en effet démontrer que leur déterminant n'est pas nul. Elles n'admettent donc qu'une solution, c'est-à-dire qu'un système de valeurs pour ces 3 dérivées; il faut prouver que ces 3 dérivées sont respectivement égales à  $\frac{\partial H}{\partial p_1}, \frac{\partial H}{\partial p_2}, \frac{\partial H}{\partial p_3}$ . Pour cela, il suffit de vérifier que ces 3 dernières quantités satisfont identiquement aux équations précédentes. Substituons-les dans la 1<sup>re</sup>:

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha \partial q_1} \frac{\partial H}{\partial p_1} + \frac{\partial V}{\partial \alpha \partial q_2} \frac{\partial H}{\partial p_2} + \frac{\partial V}{\partial \alpha \partial q_3} \frac{\partial H}{\partial p_3} + \frac{\partial V}{\partial \alpha \partial t} = 0$$

Cette équation doit devenir une identité quand on y remplace  $q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3$  par leurs valeurs tirées des équations (4) et (5). Or, cette dernière devient identiquement nulle dès qu'on y remplace seulement  $p_1, p_2, p_3$  par  $\frac{\partial V}{\partial q_1}, \frac{\partial V}{\partial q_2}, \frac{\partial V}{\partial q_3}$  (en vertu des équations (5)).

En effet, puisque, par hypothèse, la fonction:  $V(q_1, q_2, q_3, t, \alpha, \beta, \gamma)$  est une solution de l'équation de Jacobi (3), celle-ci devient une identité



quand on y substitue cette fonction. Les<sup>es</sup> membres devint ainsi une fonction de  $q, q_2, q_3$  et  $\alpha, \beta, \gamma$ , et d'autre part il devint identiquement nul: donc toutes ses dérivées partielles doivent être nulles identiquement, par exemple sa dérivée par rapport à  $\alpha$ .

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha \partial t} + \frac{\partial H}{\partial p_1} \frac{\partial V}{\partial \alpha \partial q_1} + \frac{\partial H}{\partial p_2} \frac{\partial V}{\partial \alpha \partial q_2} + \frac{\partial H}{\partial p_3} \frac{\partial V}{\partial \alpha \partial q_3} = 0$$

en y remplaçant  $\frac{\partial V}{\partial q_1}$   $\frac{\partial V}{\partial q_2}$   $\frac{\partial V}{\partial q_3}$  par  $p_1, p_2, p_3$ ; on retrouve ainsi l'identité qu'il s'agissait d'établir. On procéderait de même pour les 2 autres, et on prouverait ainsi que les 3 équations (4) sont des intégrales des équations (1.)

On démontre de même que les valeurs de  $p_1, p_2, p_3$  tirées des équations (5) satisfont les équations (2). Vérifions par exemple la 1<sup>re</sup>:

$$\frac{d p_1}{d t} + \frac{\partial H}{\partial q_1} = 0$$

$$\text{Calculons } \frac{d p_1}{d t}. \quad p_1 = \frac{\partial V}{\partial q_1}$$

d'après les équations (5) ~~que nous venons de vérifier~~; donc  $p_1$  est fonction du temps directement, et aussi par l'intermédiaire de  $q, q_2, q_3$ ; on a donc, en différentiant:

$$\frac{d p_1}{d t} = \frac{\partial V}{\partial q_1^2} \frac{d q_1}{d t} + \frac{\partial V}{\partial q_1 \partial q_2} \frac{d q_2}{d t} + \frac{\partial V}{\partial q_1 \partial q_3} \frac{d q_3}{d t} + \frac{\partial V}{\partial q_1 \partial t}$$

Or, en vertu des équations (1) que nous venons de vérifier:

$$\frac{d q_1}{d t} = \frac{\partial H}{\partial p_1}$$

$$\frac{d q_2}{d t} = \frac{\partial H}{\partial p_2}$$

$$\frac{d q_3}{d t} = \frac{\partial H}{\partial p_3}$$

Il reste donc à prouver qu'on a identiquement:

$$\frac{\partial V}{\partial q_1^2} \frac{\partial H}{\partial p_1} + \frac{\partial V}{\partial q_1 \partial q_2} \frac{\partial H}{\partial p_2} + \frac{\partial V}{\partial q_1 \partial q_3} \frac{\partial H}{\partial p_3} + \frac{\partial V}{\partial q_1 \partial t} + \frac{\partial H}{\partial q_1} = 0$$

quand on remplace  $p_1, p_2, p_3$  par  $\frac{\partial V}{\partial q_1}$   $\frac{\partial V}{\partial q_2}$   $\frac{\partial V}{\partial q_3}$  (équations (5)).



Pour cela, considérons encore l'équation de Jacobi (3) où l'on a substitué la fonction  $V$  qui vérifie cette équation; elle devient une identité, et ses dérivées partielles sont nulles, par exemple sa dérivée par rapport à  $q_1$ :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial t} + \frac{\partial H}{\partial q_1} + \frac{\partial H}{\partial p_1} \frac{\partial V}{\partial q_1^2} + \frac{\partial H}{\partial p_2} \frac{\partial V}{\partial q_1 \partial q_2} + \frac{\partial H}{\partial p_3} \frac{\partial V}{\partial q_1 \partial q_3} = 0$$

où l'on a remplacé  $\frac{\partial V}{\partial q_1}$ ,  $\frac{\partial V}{\partial q_2}$ ,  $\frac{\partial V}{\partial q_3}$  par  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$ ; c'est l'identité qu'il s'agissait de démontrer. Il est donc établi que les équations (5) sont les intégrales des équations (2), et finalement que le système des équations (4) et (5) constitue les intégrales générales du système des équations canoniques (1) et (2); les équations (4) et (5) sont donc les équations finies du mouvement.

On a ainsi transformé un système de 6 équations différentielles du 1<sup>er</sup> ordre en une équation aux dérivées partielles. Au point de vue théorique, les 2 problèmes sont équivalents; car si l'on appliquait la méthode générale à l'équation de Jacobi, on serait ramené, pour trouver les caractéristiques, à écrire 6 équations différentielles du 1<sup>er</sup> ordre, c'est-à-d. à résoudre précisément les 6 équations canoniques. Mais dans la pratique, il peut arriver, que le 2<sup>e</sup> problème soit plus aisé à résoudre que le 1<sup>er</sup> et qu'on trouve immédiatement une solution de l'équation de Jacobi.

— Appliquons l'équation de Jacobi au cas le plus simple, celui des coordonnées rectangulaires dans l'espace. Nous supposons encore la masse du point égale à 1, ce qui revient à prendre pour fonction de force  $mV$  au lieu de  $V$ , et à supprimer en suite partout le facteur  $m$ . Les coordonnées  $q_1, q_2, q_3$  sont ici  $x, y, z$ :



$$T = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

$$H = K - U = T - U$$

$$p_1 = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = \dot{x} \quad p_2 = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} = \dot{y} \quad p_3 = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_3} = \dot{z}$$

Exprimons  $H$  en fonction de  $q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3$  :

$$H = \frac{1}{2} (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) - V(x, y, z) \quad \text{L'équation de}$$

Jacobi est :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 \right] - V(x, y, z) = 0$$

Elle définit la fonction  $V(x, y, z, t)$  - On peut simplifier le calcul, car  $t$  ne figure pas explicitement dans l'équation. - Posons :

$V = -ht + \Theta(x, y, z)$  et substituons cette forme de solution dans l'équation de Jacobi :

$$-h + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \Theta}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Theta}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Theta}{\partial z} \right)^2 \right] - V(x, y, z) = 0$$

Cette équation définit maintenant la fonction  $\Theta(x, y, z)$  - Une intégrale complète de cette équation devra contenir 3 constantes arbitraires ; mais comme  $\Theta$  n'y figure que par ses dérivées, une de ces constantes peut être additive ; il suffit de trouver une solution contenant 2 constantes non additives ; l'équation peut d'ailleurs s'écrire :

$$\left( \frac{\partial \Theta}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Theta}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Theta}{\partial z} \right)^2 = 2(V + h)$$

La fonction  $\Theta$  contiendra donc nécessairement  $h$  ; elle sera de la forme :

$$\Theta(x, y, z, \alpha, \beta, h) \quad \text{et on aura : } V = -ht + \Theta(x, y, z, \alpha, \beta, h)$$

Solution contenant 3 constantes arbitraires non additives

Les équations (1) seront alors, une fois  $\Theta$  et  $V$  connus :

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha} = \frac{\partial \Theta}{\partial \alpha} = \alpha' \quad \frac{\partial V}{\partial \beta} = \frac{\partial \Theta}{\partial \beta} = \beta' \quad \frac{\partial V}{\partial h} = -t + \frac{\partial \Theta}{\partial h} = h'$$



7

Ces 3 équations sont les intégrales générales des équations canoniques, c'est-à-dire les équations finies du mouvement. Les 2 premières ne contiennent pas  $t$  : elles définissent donc la trajectoire par 2 relations entre  $x, y, z$ . La 3<sup>e</sup> donnera le temps pour chaque point de la trajectoire. Pour avoir  $x, y, z$  exprimés en fonction de  $t$ , il faudra les résoudre toutes trois par rapport à  $x, y, z$ .

On a été conduit à poser:  $x' = \frac{\partial \Theta}{\partial x}$      $y' = \frac{\partial \Theta}{\partial y}$      $z' = \frac{\partial \Theta}{\partial z}$

On peut donc dire que  $\Theta$  est une fonction des vitesses, comme  $V$  est une fonction des forces (ou des accélérations, le facteur  $m$  ayant disparu.) — La constante  $h$  est la constante des forces vives, car on a :

$$\frac{1}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2) = V + h.$$

Conséquence: La vitesse du mobile est toujours normale aux surfaces :  $\Theta = \text{constante}$ , ( $\alpha, \beta, h$  étant constantes pour un même mouvement) car les paramètres directeurs de la normale sont :

$$\frac{\partial \Theta}{\partial x}, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial y}, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial z}.$$

La trajectoire elle-même est par suite orthogonale à la famille de surfaces :  $\Theta = \text{const.}$  ; et puisqu'elle est définie par les 2

équations:  $\frac{\partial \Theta}{\partial \alpha} = \alpha'$      $\frac{\partial \Theta}{\partial \beta} = \beta'$

où  $\alpha', \beta'$  sont des constantes, on obtiendra les trajectoires orthogonales de cette famille de surfaces en faisant varier  $\alpha', \beta'$ . — On pourrait prouver que les surfaces :  $\frac{\partial \Theta}{\partial \alpha} = \text{const.}$      $\frac{\partial \Theta}{\partial \beta} = \text{const.}$  sont normales aux surfaces :  $\Theta = \text{const.}$

— En coordonnées rectangulaires dans le plan, l'équation de Jacobi



s'écrit: 
$$\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \Theta}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Theta}{\partial y} \right)^2 \right] = U(x, y) + h.$$

On devra chercher une intégrale complète avec 1 constante non additive:  
 soit la solution:  $\Theta(x, y, \alpha, h)$  Les équations du mouvement  
 seront: 
$$\frac{\partial \Theta}{\partial \alpha} = \alpha' \quad -t + \frac{\partial \Theta}{\partial h} = h'$$

La 1<sup>e</sup> définit la trajectoire, la 2<sup>e</sup> donne le temps. Dans le plan des  
 $xy$ , la trajectoire sera orthogonale à la famille de courbes:  
 $\Theta = C^te$  et on aura toutes les trajectoires orthogo-  
 nales de cette famille en faisant varier  $\alpha'$ .

Exemple: Mouvement d'un point pesant dans le vide.  
 Le mouvement s'effectue dans le plan vertical  $Oxy$ . La fonction  
 des forces est:  $V = -gy$  L'équation de Jacobi s'écrit:

$$\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \Theta}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Theta}{\partial y} \right)^2 \right] = h - gy$$

La variable  $x$  n'y figure pas;  
 et substituons:

posons donc:  $\Theta = \alpha x + \phi(y)$

$$\frac{1}{2} [\alpha^2 + \phi'(y)^2] = h - gy$$

$$\phi(y) = \int \sqrt{2h - 2gy - \alpha^2} \, dy$$

Ayant  $\phi(y)$  par une quadrature:  $\phi(y) = \frac{-1}{3g} (2h - 2gy - \alpha^2)^{\frac{3}{2}}$   
 on aura la fonction:  $\Theta = \alpha x + \phi(y)$

avec 2 constantes  $\alpha$  et  $h$ ; la 3<sup>e</sup> constante, additive, s'introduit  
 dans  $\phi(y)$  par la quadrature. L'équation:  $\frac{\partial \Theta}{\partial \alpha} = \alpha'$   
 devient:  $x - \alpha \int \frac{dy}{\sqrt{2h - 2gy - \alpha^2}} = \alpha'$

C'est l'équation d'une trajectoire parabolique: car on a, en intégrant:

$$x - \alpha' = \frac{\alpha}{g} \sqrt{2h - 2gy - \alpha^2}$$

$$(x - \alpha')^2 = \frac{\alpha^2}{g^2} (2h - 2gy - \alpha^2)$$



La 2<sup>e</sup> équation:  $\frac{\partial \Theta}{\partial h} - t = h'$  devient:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{2h - 2gy - \alpha^2}} = t + h' \quad t + h' = \frac{1}{g} \sqrt{2h - 2gy - \alpha^2}$$

Cette équation donne le temps. — On peut éliminer l'intégrale entre les 2 équations; on trouve:  $x - \alpha' = \alpha(t + h')$

équation d'un mouvement uniforme suivant l'axe horizontal Ox. La constante  $\alpha$  est la vitesse de ce mouvement, c'est la projection horizontale de la vitesse initiale:  $\alpha = \left(\frac{dx}{dt}\right)_0$

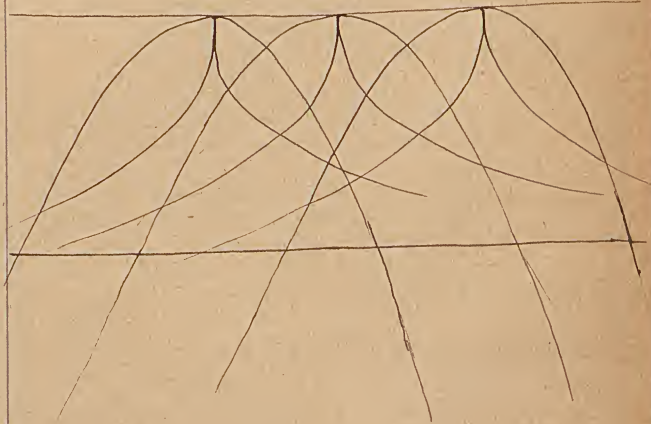
Les équations:  $\Theta = C^2$   $\frac{\partial \Theta}{\partial \alpha} = C^2$  définissent 2 familles de courbes orthogonales. — La 1<sup>re</sup> donne les trajectoires du point mobile, c'est des paraboles représentées par l'équation:  $x - \frac{\alpha}{g} \sqrt{2h - 2gy - \alpha^2} = \alpha'$

Faire varier  $\alpha'$ , c'est ajouter ou retrancher une constante à  $x$ ; c'est donc déplacer la même parabole parallèlement à Ox. Cette parabole, d'axe vertical, a pour sommet le point:  $y = \frac{2h - \alpha^2}{2g}$   $x = \alpha'$  qui annule le radical. Toutes ces paraboles ont donc pour enveloppe la droite:  $y = \frac{2h - \alpha^2}{2g}$

Les courbes:  $\Theta = C^2$  sont définies par l'équation:

$$\alpha x - \frac{1}{3g} (2h - 2gy - \alpha^2)^{\frac{3}{2}} = \alpha C$$

Faire varier  $C$ , c'est ajouter à  $x$  une constante, c'est donc déplacer





cette courbe parallèlement à Ox.

$$y = \frac{2h - x^2}{2g} \quad x = C$$

transporter l'origine en ce point, qui est un point de rebroussement. Son équation devient alors:

$$x_1 = k (-y_1)^{\frac{3}{2}}$$

C'est une parabole semi-cubique, qui coupe orthogonalement toutes les paraboles de la même famille, et qui a son sommet sur la même droite où se trouvent les sommets de celles-ci:

$$y = \frac{2h - x^2}{2g}$$

Mouvement d'un point matériel attiré par 2 centres fixes suivant la loi de Newton (Euler, Lagrange, Jacobi, thèse de Serret et Andrade.)

Nous emploierons, avec Jacobi, les coordonnées elliptiques dans le plan; soient F, F' les 2 foyers sur l'axe des x à égale distance de O; l'équation des coniques homofocales est:

$$\frac{x^2}{a-\lambda} + \frac{y^2}{b-\lambda} - 1 = 0 \quad \text{où: } a > b$$

A chaque point M du plan correspondent 2 valeurs de  $\lambda$ , l'une  $q_1 < b$  qui donne une ellipse, l'autre:  $b < q_2 < a$  qui donne une hyperbole. On a d'ailleurs les formules de transformation:

$$y^2 = \frac{(b-q_1)(b-q_2)}{b-a} \quad x^2 = \frac{(a-q_1)(a-q_2)}{a-b}$$

Le carré de l'élément linéaire est:  $ds^2 = \frac{1}{4} [N_1 dq_1^2 + N_2 dq_2^2]$

en posant:  $N_1 = \frac{q_2 - q_1}{(q_1 - a)(q_1 - b)}$   $N_2 = \frac{q_1 - q_2}{(q_2 - a)(q_2 - b)}$

(2<sup>e</sup> Cahier, page 138.)

Posons, pour abréger:  $Q(q) = (q-a)(q-b)$



11

Cherchons l'expression en coordonnées elliptiques des 2 rayons vecteurs du pt  $M$ :  $FM = z$ ,  $F'M = z'$ .

L'ellipse qui passe par  $M$  a pour équation:

$$\frac{x^2}{a-q_1} + \frac{y^2}{b-q_1} - 1 = 0 \quad \text{et pour grand axe: } 2\sqrt{a-q_1}$$

Donc:  $z' + z = 2\sqrt{a-q_1}$

L'hyperbole qui passe par  $M$  a pour équation:

$$\frac{x^2}{a-q_2} + \frac{y^2}{b-q_2} - 1 = 0 \quad \text{et pour axe transverse: } 2\sqrt{a-q_2}$$

Donc:  $z' - z = 2\sqrt{a-q_2}$  en supposant  $z' > z$ .

D'où:  $z' = \sqrt{a-q_1} + \sqrt{a-q_2}$   $z = \sqrt{a-q_1} - \sqrt{a-q_2}$

Soient maintenant dans l'espace les 2 centres attractifs  $F, F'$  sur  $Ox$  à égale distance de  $O$ .

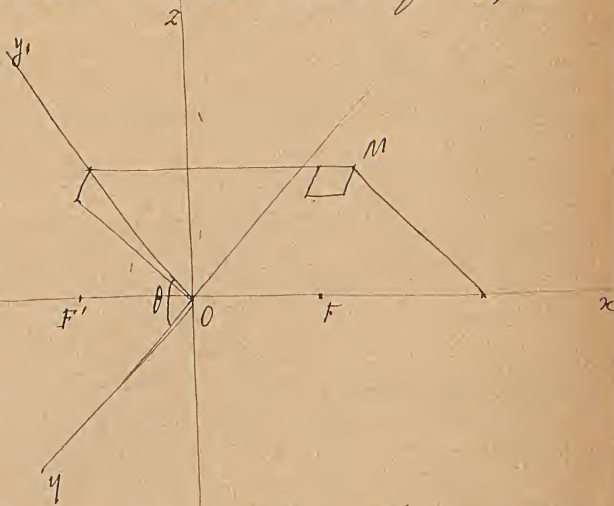
Déterminons d'abord le plan du pt  $M$  et de l'axe des  $x$ ; il a pour trace  $Oy_1$  sur le plan  $yOx$ ; soit:

$$y, \hat{O}y_1 = \theta$$

Cet angle fixe la position de ce plan.

Dans ce plan, nous définirons la position du pt  $M$  par les coordonnées elliptiques  $q_1, q_2$ .

Calculons l'élément linéaire dans l'espace; pour cela, imprimons au pt  $M$  un déplacement arbitraire. Il suffit de le déplacer d'abord dans le plan  $y_1Ox$ , puis normalement à ce plan; car un déplacement





quelconque équivant à ces 2 déplacements:  $MM_1$  dans le plan  $yz$ ,  $Ox$ ,  $M, M'$  par une rotation de ce plan autour de  $Ox$ :

$$ds^2 = ds_1'^2 + ds_2'^2 \quad \text{Or,} \quad ds_1'^2 = \frac{1}{4} [N_1 dq_1'^2 + N_2 dq_2'^2] \quad ds_2'^2 = y_1'^2 d\theta^2$$

Donc: 
$$ds^2 = \frac{1}{4} [N_1 dq_1'^2 + N_2 dq_2'^2] + y_1'^2 d\theta^2$$

$dq_1, dq_2, d\theta$  valent dans cette expression qu'en carrés, parce que les 3 surfaces:  $q_1 = C^{te}$   $q_2 = C^{te}$   $\theta = C^{te}$  sont orthogonales. Les surfaces des 2 premières familles sont des ellipsoïdes et des hyperboloïdes à 2 nappes de révolution; celles de la 3<sup>e</sup> sont les plans qui passent par l'axe des  $x$ . -  $\theta$  est la 3<sup>e</sup> coordonnée  $q_3$ . On aura:

$$T = \frac{1}{2} \frac{ds^2}{dt^2} = \frac{1}{2} \left[ \frac{N_1}{4} q_1'^2 + \frac{N_2}{4} q_2'^2 + y_1'^2 \theta'^2 \right]$$

Les variables auxiliaires  $p_1, p_2, p_3$  sont alors:

$$p_1 = \frac{\partial T}{\partial q_1'} = \frac{N_1}{4} q_1' \quad p_2 = \frac{\partial T}{\partial q_2'} = \frac{N_2}{4} q_2' \quad p_3 = \frac{\partial T}{\partial \theta'} = y_1'^2 \theta'$$

On en tire immédiatement les expressions de  $q_1', q_2', \theta'$ .

Cette transformation est usitée dans la théorie des coniques, pour passer des coordonnées cartésiennes aux coordonnées tangentielles.

$$T = \frac{1}{2} \left[ \frac{4}{N_1} p_1^2 + \frac{4}{N_2} p_2^2 + \frac{p_3^2}{y_1'^2} \right]$$

Les nouveaux coefficients sont les inverses des anciens: cela tient à ce que  $q_1', q_2', \theta'$  sont au carré dans  $T$ . On aura,  $T$  étant homogène en  $q_1', q_2', \theta'$ :

$$H = T - U$$

Calculons la fonction des forces. Le point  $M$  est soumis aux attractions:

$$-\frac{\mu}{r^2} \quad \text{et} \quad -\frac{\mu_1}{r_1'^2} \quad (\text{en faisant sa masse égale à l'unité})$$

Dans un déplacement quelconque, la somme des travaux élémentaires



de ces 2 forces centrales est :

$$-\left(\frac{\mu}{r^2} + \frac{\mu'}{r'^2}\right) dr$$

Donc 
$$V = \frac{\mu}{r} + \frac{\mu'}{r'} = \frac{\mu r' + \mu' r}{rr'}$$

Exprimons  $V$  en fonction de  $q_1, q_2$  : 
$$V = \frac{V_2 - V_1}{q_2 - q_1}$$

Nous désignons par  $V_1$  une fonction de  $q_1$  seul, par  $V_2$  une fonction de  $q_2$  seul : c'est et d'ailleurs :

$$V_1 = -(\mu + \mu')\sqrt{a - q_1}$$

$$V_2 = (\mu - \mu')\sqrt{a - q_2}$$

Mais nous n'avons pas besoin de ces expressions, et les calculs que nous allons faire s'appliquent toutes les fois que l'on a 2 fonctions  $V_1, V_2$  dont chacune ne dépend que d'une variable  $q_1, q_2$ .

Rappelons que : 
$$N_1 = \frac{q_2 - q_1}{\varphi(q_1)} \quad N_2 = \frac{q_1 - q_2}{\varphi(q_2)}$$

$$H = \frac{1}{2} \left[ \frac{4\varphi(q_1)}{q_2 - q_1} p_1^2 + \frac{4\varphi(q_2)}{q_1 - q_2} p_2^2 + \frac{b-a}{(b-q_1)(b-q_2)} p_3^2 \right] - \frac{V_2 - V_1}{q_2 - q_1}$$

On pourrait maintenant écrire les équations canoniques; mais nous emploierons le théorème de Jacobi pour trouver les intégrales. Prenons  $(q_2 - q_1)$  pour dénominateur commun dans  $H$  :

$$\frac{1}{(b-q_1)(b-q_2)} = \frac{1}{q_2 - q_1} \left( \frac{1}{b-q_2} - \frac{1}{b-q_1} \right) \quad \text{Écrivons l'équation de Jacobi :}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[ \frac{4\varphi(q_1)}{q_2 - q_1} \left( \frac{\partial V}{\partial q_1} \right)^2 - \frac{4\varphi(q_2)}{q_2 - q_1} \left( \frac{\partial V}{\partial q_2} \right)^2 + \frac{\frac{b-a}{b-q_2} - \frac{b-a}{b-q_1}}{q_2 - q_1} \left( \frac{\partial V}{\partial \theta} \right)^2 \right] - \frac{V_2 - V_1}{q_2 - q_1} = 0$$

On doit en tirer la fonction  $V(q_1, q_2, \theta, t)$  avec 3 constantes non additives. Comme ni  $\theta$  ni  $t$  ne figurent dans l'équation de Jacobi, on posera :

$$V = -ht + \alpha\theta + V_1(q_1) + V_2(q_2) \quad h, \alpha \text{ constantes.}$$



On suppose que  $V$  peut se dédoubler (comme  $U$ ) en 2 fonctions dont chacune ne dépende que d'une des 2 variables  $q_1, q_2$ . On va le vérifier. Substituons cette forme de  $V$  en chassant les dénominateurs :

$$-2h(q_2 - q_1) + 4\phi(q_1)V_1'^2 - 4\phi(q_2)V_2'^2 + 2\left(\frac{b-a}{b-q_2} - \frac{b-a}{b-q_1}\right) - 2W_2 + 2W_1 = 0$$

Cette équation se partage en 2 parties dont l'une contient  $q_1$ , l'autre  $q_2$  :

$$2hq_1 + 4\phi(q_1)V_1'^2 - \frac{b-a}{b-q_1}\alpha^2 + 2W_1 = 2hq_2 + 4\phi(q_2)V_2'^2 - \frac{b-a}{b-q_2}\alpha^2 + 2W_2$$

Pour qu'il y ait une solution de cette équation différentielle, il faut que les 2 membres soient constants, puisqu'ils dépendent respectivement de 2 variables indépendantes. Égalons donc chacun d'eux à une constante commune  $2\beta$  : on en tirera :

$$V_1'^2 = \frac{2\beta - 2hq_1 + \frac{b-a}{b-q_1}\alpha^2 - 2W_1}{4\phi(q_1)} \quad \text{d'où :}$$

$$V_1 = \frac{1}{2} \int \sqrt{\frac{2\beta - 2hq_1 + \frac{b-a}{b-q_1}\alpha^2 - 2W_1}{\phi(q_1)}} dq_1 \quad \text{et de même}$$

$$V_2 = \frac{1}{2} \int \sqrt{\frac{2\beta - 2hq_2 + \frac{b-a}{b-q_2}\alpha^2 - 2W_2}{\phi(q_2)}} dq_2$$

On voit que  $V_1, V_2$  ne dépendent chacun que d'une des variables  $q_1, q_2$ . En calculant  $V_1, V_2$  par ces quadratures, on aura l'intégrale complète :

$$V = -ht + \alpha\theta + V_1(q_1) + V_2(q_2)$$

avec les 3 constantes  $h, \alpha, \beta$ , et 1 constante additive provenant des quadratures. On pourra alors écrire les 3 équations du mouvement :

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha} = \alpha' \quad \frac{\partial V}{\partial \beta} = \beta' \quad \frac{\partial V}{\partial h} = h'$$



qui définissent  $q, q_2, \theta$  en fonction du temps, c.à.d. déterminent les positions successives du point mobile  $M$  dans l'espace.

Ces équations seront explicitement :

$$\alpha' = \theta + \frac{a(b-a)}{2} \int \frac{dq_1}{\sqrt{\varphi(q_1) \left( \beta - 2hq_1 + \frac{b-a}{b-q_1} \alpha^2 - 2V_1 \right)}} + \frac{a(b-a)}{2} \int \frac{dq_2}{\sqrt{\varphi(q_2) \left( \beta - 2hq_2 + \frac{b-a}{b-q_2} \alpha^2 - 2V_2 \right)}}$$

$$\beta' = \int \frac{dq_1}{\sqrt{\varphi(q_1) \left( \beta - 2hq_1 + \frac{b-a}{b-q_1} \alpha^2 - 2V_1 \right)}} + \int \frac{dq_2}{\sqrt{\varphi(q_2) \left( \beta - 2hq_2 + \frac{b-a}{b-q_2} \alpha^2 - 2V_2 \right)}}$$

$$h' = -t - \frac{1}{2} \int \frac{q_1 dq_1}{\sqrt{\varphi(q_1) \left( \beta - 2hq_1 + \frac{b-a}{b-q_1} \alpha^2 - 2V_1 \right)}} - \frac{1}{2} \int \frac{q_2 dq_2}{\sqrt{\varphi(q_2) \left( \beta - 2hq_2 + \frac{b-a}{b-q_2} \alpha^2 - 2V_2 \right)}}$$

La 2<sup>e</sup> de ces équations ne contient que  $q, q_2$  : elle définira donc la trajectoire relative du mobile dans le plan tournant  $y, Ox$ . La 1<sup>e</sup> donnera  $\theta$  en fonction de  $q, q_2$ , c.à.d. la rotation du plan autour de  $Ox$ . La 3<sup>e</sup> donnera le temps en fonction de  $q, q_2$ , c.à.d. le mouvement sur la trajectoire relative dans le plan mobile  $y, Ox$  : le mouvement absolu sera ainsi complètement déterminé.

Remarquons que  $V_1, V_2$  sont irrationnels :  $\sqrt{a-q_1}, \sqrt{a-q_2}$  mais on fera disparaître cette irrationalité en posant :

$$a - q_1 = p_1^2$$

$$a - q_2 = p_2^2$$

Les quantités soumises aux radicaux deviendront rationnelles, et on pourra, par des réductions, les ramener au 4<sup>e</sup> degré : on aura donc 6 intégrales elliptiques, qu'on pourra convertir, au moyen des fonctions  $\theta$ , en fonctions elliptiques inverses :  $sn, cn, dn$ .



Les mêmes calculs, avons-nous dit, s'appliquent à toutes les fonctions  $V_1, V_2$  qui dépendent séparément de  $q, q_2$ . On pourrait par exemple ajouter aux 2 attractions issues des foyers une attraction issue du centre et proportionnelle à la distance.

On sait que  $h$  est en général la constante des ~~forces~~ <sup>forces vives</sup>. D'autre part,  $\alpha$  est la constante des aires; en effet, on a les 3 équations:

$$p_1 = \frac{\partial V}{\partial q_1}$$

$$p_2 = \frac{\partial V}{\partial q_2}$$

$$p_3 = \frac{\partial V}{\partial q_3} = \frac{\partial V}{\partial \theta}$$

qui deviennent:

$$\frac{N_1}{4} q_1' = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\beta - 2hq_1 + \frac{b-a}{b-q_1} \alpha^2 - 2V_1}{Q(q_1)}}$$

$$\frac{N_2}{4} q_2' = \sqrt{\frac{2\beta - 2hq_2 + \frac{b-a}{b-q_2} \alpha^2 - 2V_2}{Q(q_2)}}$$

$$y_1^2 \theta' = \alpha$$

Cette dernière équation, où  $\alpha$  est une constante, exprime que la projection du p. M sur le plan  $Oyz$  obéit à la loi des aires, car  $y_1$  est le rayon vecteur de cette projection. On pourrait d'ailleurs prévoir ce résultat, car les seules forces auxquelles soit soumis le p. M ont des moments nuls par rapport à l'axe des  $x$ ; la loi des aires est donc vraie dans tout plan perpendiculaire à  $Ox$ .

### Principe de la moindre action.

Ce principe, entrevu par Euler, formulé par Maupertuis pour la première fois, a été employé par Lagrange & Laplace; Jacobi l'a énoncé et démontré pour le cas d'une fonction de forces.

Considérons un point matériel entièrement libre, soumis à des forces qui dérivent d'un potentiel: —  $V(x, y, z)$ . Les équations du mouvement sont:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\partial V}{\partial y}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

en faisant la masse égale à 1 (ou en divisant  $V$  par  $m$ .)



17

Nous ne considérerons que les mouvements dans lesquels la constante des forces vives  $h$  a la même valeur, ce qui signifie que, pour une même position initiale, la vitesse initiale du point mobile a la même valeur arithmétique, quelle que soit d'ailleurs sa direction, car  $v_0$  est déterminé par la relation:  $v_0^2 = 2(V_0 + h)$

Cela posé, proposons-nous la question suivante:

Problème. Étant donnés dans l'espace 2 points A, B, par quelle courbe C faut-il joindre ces 2 points pour que l'intégrale curviligne:

$$J = \int_A^B \sqrt{2(V+h)} \, ds$$

prise suivant cette courbe soit minimum?

La valeur de l'intégrale  $J$  prise suivant une courbe quelconque s'appelle (Lair et Thomson) l'action du point mobile sur cette courbe de A en B. On demande donc de trouver la ligne de moindre action de A en B. — Or le minimum de  $J$  existe, car le radical est pris positivement et ne s'annule pas. On va prouver que la ligne de moindre action est une des courbes que suivrait le mobile abandonné à lui-même et ~~sous l'action des forces données~~ <sup>librement</sup> ~~avec~~ <sup>librement</sup> s'il était lancé du pt. A avec la vitesse initiale donnée de manière à atteindre le point B.

Nous avons en effet traité, à l'occasion de l'équilibre des fils (Le catin, page 7) le problème général relatif au minimum de l'intégrale:

$$\int_A^B \varphi(x, y, z) \, ds$$

prise suivant une certaine courbe joignant A à B. On obtient la courbe qui rend cette intégrale minimum en cherchant la position



d'équilibre d'un fil soumis à des forces dérivant du potentiel  $\varphi$  ;  
 les équations de cette courbe sont :

$$d\left(\varphi \frac{dx}{ds}\right) - \frac{\partial \varphi}{\partial x} ds = 0 \quad d\left(\varphi \frac{dy}{ds}\right) - \frac{\partial \varphi}{\partial y} ds = 0 \quad d\left(\varphi \frac{dz}{ds}\right) - \frac{\partial \varphi}{\partial z} ds = 0$$

Faisons donc :  $\varphi(x, y, z) = \sqrt{2(U+h)}$  On aura :

$$d\left(\sqrt{2(U+h)} \frac{dx}{ds}\right) - \frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{\sqrt{2(U+h)}} ds = 0 \quad \text{et de même les 2 autres.}$$

Ces 3 équations définiront la ligne de moindre action. Introduisons  
 la variable auxiliaire  $t$  :

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{2(U+h)}}$$

Les équations deviennent :

$$d\left(\frac{dx}{dt}\right) - \frac{\partial U}{\partial x} dt = 0$$

$$\text{ou : } \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) - \frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z}$$

Ci sont les équations du mouvement d'un point soumis à des  
 forces dérivant du potentiel  $-U$ , et où  $t$  est le <sup>réel</sup> temps : la ligne  
 de moindre action est la trajectoire que doit suivre ce point pour  
 aller de A en B. — L'équation du changement de variable  
 exprime le théorème des forces vives et détermine la constante  $h$  :

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{2(U+h)}$$

$$v^2 = 2(U+h)$$

Dans le cas le plus simple où le point n'est soumis à aucune force  
 $U=0$  : alors le point décrit une droite avec une vitesse constante.

En effet, son action est :

$$\sqrt{2h} \int_A^B ds = \sqrt{2h} l$$

$l$ , longueur de la ligne AB, est minimum quand c'est la droite AB.

Le principe de la moindre action exprime certaines propriétés géomé-  
 triques de la trajectoire du mobile libre — On peut appliquer à l'action



tout ce qui a été dit touchant l'intégrale générale  $\int q ds$  —  
Par exemple, si on lance le point mobile normalement à une surface contenant sa position initiale, on aura une famille de trajectoires; si sur ces trajectoires on prend des longueurs telles que l'action du mobile ait la même valeur sur toutes, les extrémités de ces long-  
formeraient une surface qui sera encore normale aux trajectoires; c'est une sorte de parallélisme que l'action établit ainsi entre des surfaces toutes normales aux trajectoires (cf. Traité de géométrie de M. Darboux, 2<sup>e</sup> volume, fin.)

— Principe de Hamilton —

Ce principe, comme celui de la moindre action, caractérise la trajectoire d'un point matériel libre par le minimum d'une certaine intégrale définie. Mais il est plus général que le précédent, car il s'applique, non seulement au cas d'une fonction de forces  $V(x, y, z)$ , mais au cas où  $X, Y, Z$  sont les dérivées partielles par rapport à  $x, y, z$  d'une fonction  $V(x, y, z, t)$ .

Supposons toujours le point de masse 1; considérons l'intégrale de Hamilton:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \left[ \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + V(x, y, z) \right] dt$$

$x, y, z$  sont des fonctions du paramètre  $t$  définissant une courbe; on se donne à l'avance la position du mobile  $M_0 (x_0, y_0, z_0)$  à l'instant  $t_0$ , et sa position  $M_1 (x_1, y_1, z_1)$  à l'instant  $t_1$ , de sorte que la courbe, quelle qu'elle soit, passe par les points  $M_0, M_1$ . Non seulement la courbe est quelconque entre ces 2 points, mais elle est dictée suivant une loi quelconque entre les instants  $t_0$  et  $t_1$ . Cherchons parmi tous les mouvements possibles ainsi définis celui pour lequel l'intégrale



20  
 $J$  est minimum. On va démontrer que c'est le mouvement naturel  
 du mobile libre soumis à l'action de la force donnée, qui a pour  
 projections:  $X = \frac{\partial V}{\partial x}$   $Y = \frac{\partial V}{\partial y}$   $Z = \frac{\partial V}{\partial z}$

Imaginons que ce minimum de l'intégrale  $J$  ait lieu pour certaines  
 fonctions du temps:  $x = \varphi(t)$   $y = \psi(t)$   $z = \omega(t)$

Cela veut dire que la variation de l'intégrale est nulle quand on fait  
 varier infiniment peu ces fonctions entre  $t_0$  et  $t_1$ , par exemple en  
 les remplaçant par:

$$x + \delta x = \varphi(t) + \varepsilon \xi \quad y + \delta y = \psi(t) + \varepsilon \eta \quad z + \delta z = \omega(t) + \varepsilon \zeta$$

$\xi, \eta, \zeta$  étant des fonctions arbitraires du temps qui s'annulent aux  
 limites  $t_0, t_1$ . Quand  $x, y, z$  augmentent de  $\delta x, \delta y, \delta z$ ,  
 c-à-d. de  $\varepsilon \xi, \varepsilon \eta, \varepsilon \zeta$ , leurs dérivées  $x', y', z'$  augmentent de:

$$(\delta x)' = \varepsilon \xi' \quad (\delta y)' = \varepsilon \eta' \quad (\delta z)' = \varepsilon \zeta'$$

On peut d'ailleurs écrire  $\delta x', \delta y', \delta z'$  au lieu de  $(\delta x)', (\delta y)', (\delta z)'$ .

La variation de l'intégrale  $J$  aura donc pour expression:

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_1} (x' \delta x' + y' \delta y' + z' \delta z' + \frac{\partial V}{\partial x} \delta x + \frac{\partial V}{\partial y} \delta y + \frac{\partial V}{\partial z} \delta z) dt$$

Transformons les 3 premiers termes de l'intégrale en les intégrant par  
 parties:  $\int x' \delta x' dt = \int x' d(\delta x) = x' \delta x - \int \delta x \cdot x'' dt$

Or, pris aux limites  $t_0, t_1$ , les termes  $x' \delta x + y' \delta y + z' \delta z$   
 s'annulent, car  $\delta x, \delta y, \delta z$  sont nuls pour les extrémités  $t_0, t_1$ .

$$\text{On a donc: } \delta J = \int_{t_0}^{t_1} \left[ \left( -x'' + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \delta x + \left( -y'' + \frac{\partial V}{\partial y} \right) \delta y + \left( -z'' + \frac{\partial V}{\partial z} \right) \delta z \right] dt$$

$J$  étant maximum ou minimum  $\delta J$  est nul quel que soient



21

Les accroissements arbitraires  $\delta x \delta y \delta z$  entre  $t_0, t_1$ . On a donc séparément, en égalant à 0 leurs coefficients respectifs :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial x} \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial y} \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial z}$$

Ces sont précisément les équations du mouvement du point libre. Donc, pour avoir la loi du mouvement qui rend l'intégrale  $J$  minimum, on devra lancer le point depuis  $M_0$ , à l'époque  $t_0$ , avec une vitesse et dans une direction telles qu'il arrive en  $M_1$  à l'époque  $t_1$ .

On peut, en partant de ce principe, retrouver très facilement les équations de Lagrange. Pour cela, on pose, comme toujours :

$$T = \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2) \quad \text{d'où :} \quad J = \int_{t_0}^{t_1} (T + V) dt$$

On vient de voir qu'on obtient les équations du mouvement quand on exprime que l'intégrale  $J$  est maximum ou minimum. Cette conclusion est évidemment indépendante du système de coordonnées. Écrivons donc les formules de transformation les plus générales des coordonnées :

$$x = \varphi(q, q_2, q_3, t) \quad y = \psi(q, q_2, q_3, t) \quad z = \omega(q, q_2, q_3, t)$$

Alors  $V$  devient fonction de  $q, q_2, q_3, t$ ;  $x', y', z'$  deviennent fonctions de  $\dot{q}, \dot{q}_2, \dot{q}_3$ , et l'intégrale quantité à intégrer  $(T + V)$  devient une fonction de  $(q, q_2, q_3, \dot{q}, \dot{q}_2, \dot{q}_3, t)$ . — Pour  $t = t_0$ ,  $x, y, z$  ont les valeurs données  $x_0, y_0, z_0$ ; donc  $q, q_2, q_3$  auront des valeurs déterminées par les 3 équations précédentes, et fixes; de même pour  $t = t_1$ ,  $q, q_2, q_3$  auront des valeurs fixes correspondantes aux valeurs données  $x_1, y_1, z_1$ . Les variations des nouvelles coordonnées  $q, q_2, q_3$  doivent donc s'annuler aux limites  $t_0, t_1$ .



La variation de  $J$  aura pour expression :

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{\partial T}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial T}{\partial q_2} \delta q_2 + \frac{\partial T}{\partial q_3} \delta q_3 + \frac{\partial T}{\partial q_1'} \delta q_1' + \frac{\partial T}{\partial q_2'} \delta q_2' + \frac{\partial T}{\partial q_3'} \delta q_3' + \frac{\partial U}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial U}{\partial q_2} \delta q_2 + \frac{\partial U}{\partial q_3} \delta q_3 \right) dt$$

Transformons les termes en  $\delta q_1'$ ,  $\delta q_2'$ ,  $\delta q_3'$ , en les intégrant par parties :

$$\int \frac{\partial T}{\partial q_1'} \delta q_1' dt = \int \frac{\partial T}{\partial q_1'} d(\delta q_1) = \frac{\partial T}{\partial q_1'} \delta q_1 - \int \delta q_1 \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial q_1'} \right) dt$$

Or, prise de  $t_0$  à  $t_1$ , la partie intégrée s'annule, puisque  $\delta q_1, \delta q_2, \delta q_3$  sont nulles aux limites; on a donc en définitive :

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_1} \left[ \left[ \frac{\partial T}{\partial q_1} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial q_1'} \right) + \frac{\partial U}{\partial q_1} \right] \delta q_1 + \left[ \frac{\partial T}{\partial q_2} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial q_2'} \right) + \frac{\partial U}{\partial q_2} \right] \delta q_2 + \left[ \frac{\partial T}{\partial q_3} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial q_3'} \right) + \frac{\partial U}{\partial q_3} \right] \delta q_3 \right] dt$$

On sait que cette variation est nulle dans le mouvement naturel du point mobile; quels que soient les accroissements arbitraires  $\delta q_1, \delta q_2, \delta q_3$ ; on a donc dans ce mouvement les équations :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial q_1'} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} = \frac{\partial U}{\partial q_1} \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial q_2'} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} = \frac{\partial U}{\partial q_2} \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial q_3'} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_3} = \frac{\partial U}{\partial q_3}$$

Ces sont bien les équations de Lagrange.

On verra plus tard que les 2 principes que nous venons d'établir (celui de Hamilton et celui de la moindre action) s'appliquent au mouvement des systèmes dans les mêmes conditions.



# Mouvement d'un point assujéti à des liaisons.

Le cas le plus simple d'une liaison est celui d'un point matériel glissant sans frottement sur une courbe, soit fixe, soit changeant de position et même de forme avec le temps.

Considérons d'abord un point mobile sur une courbe fixe. Il est sollicité par des forces directement appliquées qui ont pour résultante  $\vec{F}$  ( $X, Y, Z$ ); il est de plus soumis à la réaction normale de la courbe,  $N$ . On obtient immédiatement l'équation du mouvement en appliquant le théorème des forces vives; pour le déplacement  $ds$  ( $dx, dy, dz$ ) on a:

$$d \frac{mv^2}{2} = Xdx + Ydy + Zdz$$

La réaction normale se trouve éliminée parce que son travail est nul. On a ainsi une équation qui définit le mouvement du point sur la courbe fixe, car sa position ne dépend que d'un paramètre.

Supposons la courbe exprimée en fonction d'un paramètre  $q$ :

$$x = \varphi(q) \quad y = \psi(q) \quad z = \omega(q)$$

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = [\varphi'(q)^2 + \psi'(q)^2 + \omega'(q)^2] \left(\frac{dq}{dt}\right)^2$$

Alors: 
$$d \frac{mv^2}{2} = [X\varphi'(q) + Y\psi'(q) + Z\omega'(q)] dq = Q dq$$

Dans le cas le plus général,  $Q$  sera une fonction de  $q$ , de  $q'$  et de  $t$ .

L'équation des forces vives sera une équation différentielle du 2<sup>e</sup> ordre définissant  $q$  en fonction de  $t$ , c'est le mouvement sur la courbe.

On verra dans la suite que les équations de Lagrange fournissent un moyen d'écrire directement cette équation.

Remarquons que  $Q$  est la fonction qui s'annule dans les positions d'équilibre, car l'équation:  $Q = 0$  exprime que la force donnée  $\vec{F}$

est normale à la courbe (cf. Statique, 1<sup>er</sup> cahier, page 84.)



Si la force donnée ne dépend que de la position du point mobile,  $Q$  ne dépendra que de  $q$ , et on aura la vitesse par une quadrature:

$$\frac{mv^2}{2} = \int Q dq$$

En remplaçant  $v^2$  par sa valeur en  $q$ , on aura:

$$\left(\frac{dq}{dt}\right)^2 = \Phi(q)$$

d'où l'on tire, en intégrant:

$$dt = \pm \frac{dq}{\sqrt{\Phi(q)}}$$

On a le temps par une quadrature.

Ainsi, quand la force ne dépend que de la position, le problème se résout par 2 quadratures.

Pour chasser l'indétermination qui provient du double signe du radical, on prendra au début du mouvement le signe de la vitesse initiale  $\left(\frac{dq}{dt}\right)_0$  et on le conservera jusqu'à ce que  $\frac{dq}{dt}$  s'annule, ou devienne infini.

Si  $\frac{dq}{dt}$  devient infini, le mouvement est nécessairement arrêté par les conditions physiques, et les formules cessent de le représenter.

Si  $\frac{dq}{dt}$  devient nul, le mobile se mouvra à partir de cet instant comme s'il était abandonné sans vitesse initiale dans cette position.

Comme on connaît la direction de la force, on saura dans quel sens le point se déplace, et on prendra le signe correspondant jusqu'à une nouvelle valeur critique de  $\frac{dq}{dt}$ .

Dans le cas où il y a une fonction de forces, on peut intégrer immédiatement l'équation du mouvement, on a bien égal des forces vives:

$$\frac{mv^2}{2} = U + h.$$

On a ainsi directement la vitesse exprimée en fonction de  $x, y, z$ .

On achèvera le calcul comme ci-dessus pour trouver l'équation finie du mouvement: on aura  $t$  en fonction de  $q$  par une quadrature.

— Calcul de la réaction normale. — Deux méthodes:



On peut déduire la réaction normale des équations générales du mouvement.  
Soient les équations de la courbe:  $f(x, y, z) = 0$      $f_1(x, y, z) = 0$

Les projections de la réaction normale  $N$  (dont les 2 composantes sont normales aux 2 surfaces  $f=0$ ,  $f_1=0$ ) seront:

$$\lambda \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} \qquad \lambda \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} \qquad \lambda \frac{\partial f}{\partial z} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z}$$

Les équations du mouvement seront donc:

$$\begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} &= X + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} \\ m \frac{d^2y}{dt^2} &= Y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ m \frac{d^2z}{dt^2} &= Z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} \end{aligned}$$

En éliminant  $\lambda, \lambda_1$  entre ces 3 équations, on retrouverait l'équation unique du mouvement sur la courbe (équation des forces vivres.)

Donc, un fois le mouvement connu, c.à.d.  $x, y, z$  exprimés en fonction de  $t$ , on tirera  $\lambda, \lambda_1$  de 2 quelconques de ces équations.

Autre méthode, plus commode quand la courbe a une définition géométrique simple: on écrit que la force donnée est le produit de l'accélération par la masse. — Projétons la force et l'accélération sur la tangente, la normale principale et la binormale à la courbe au point  $M$ : la même relation subsistera entre leurs projections. Celles de  $F$  sont connues:  $F_t, F_n, F_b$ . Celles de  $N$  sont:  $0, N_n, N_b$ .

Celles de l'accélération sont:  $\frac{dv}{dt}, \frac{v^2}{\rho}, 0$  (cf 1<sup>er</sup> cahier, page 32)

Les équations du mouvement sont donc:

$$m \frac{dv}{dt} = F_t \qquad m \frac{v^2}{\rho} = F_n + N_n \qquad 0 = F_b + N_b$$

La 1<sup>re</sup> est l'équation du mouvement sur la courbe; les 2 autres donnent





$N_1, N_2$ ; pour cela il faut connaître le rayon de courbure  $\rho$  de la courbe donnée en chaque point.  $v^2$  se calculera comme plus haut; dans le cas d'une fonction des forces on a:  $\frac{mv^2}{2} = U + h$

La 1<sup>e</sup> équation est, dans tous les cas, l'équation des forces vives; on peut l'écrire:  $m \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt} = F_t$  ou:  $m v dv = F_t ds$

$$d \frac{mv^2}{2} = F_t ds$$

Le 2<sup>e</sup> membre est le travail élémentaire de la force donnée  $F$  pour le déplacement  $ds$ .

On peut remarquer que le mouvement du point sur la courbe ne dépend que de la composante tangentielle de la force et de la longueur de l'arc. Donc, si l'on déforme la courbe en conservant les longueurs, et si l'on modifie la force de manière que sa projection tangentielle reste la même, le mouvement sur la nouvelle courbe sera identique au précédent. On pourra en particulier rectifier la courbe et réduire la force à sa composante tangentielle. Ainsi le mouvement d'un point sur une courbe sera ainsi aisément au mouvement rectiligne d'un point libre.

Application: Mouvement d'un point pesant sur une circonférence; pendule simple.

Nous considérons une circonférence située dans un plan vertical  $ZOx$  (si elle était dans un plan oblique faisant l'angle  $\varphi$  avec l'horizon, on aurait les mêmes équations, seulement le poids du mobile serait  $mg \sin \varphi$ ). — Le point est soumis à son poids  $mg$ , à l'action normale  $N$ ; on a l'équation des forces vives:  $d \frac{mv^2}{2} = -mg dx$

Donc l'intégrale:  $\frac{v^2}{2} = -gx + h$

Cette formule convient à un point pesant assujéti à rester sur une



Courbe quelconque dans un plan vertical: posons

$$a = \frac{b}{g};$$

$$v^2 = 2g(a - z)$$

Cette équation de la vitesse a une signification géométrique simple: menons le plan horizontal:  $z = a$

On voit que la vitesse a en chaque point de la courbe la même valeur numérique que si le mobile était tombé verticalement depuis ce plan sans vitesse initiale. On a ainsi une représentation de la vitesse, qui est proportionnelle à la racine carrée de la distance du point au plan fixe:  $z = a$ . Cette représentation est analogue à celle de la tension d'un fil pesant, soit libre (1<sup>er</sup> cahier, page 140) soit posé sur une surface (2<sup>e</sup> cahier, page 5).

Supposons maintenant que la courbe est un cercle de centre  $O$ , et que le plan  $\Pi(z = a)$  le coupe en 2 points  $A, A'$  (ce plan peut être au-dessous de la circonférence, car alors  $v$  serait imaginaire.) Prenons pour paramètre l'angle de l'arc  $\theta = \widehat{POM}$ ,  $P$  étant le point le plus bas (sur  $Oz$ ). Soit  $l$  le rayon du cercle (longueur du pendule simple) on a:

$$ds = l d\theta \quad v = l \frac{d\theta}{dt} \quad z = -l \cos \theta$$

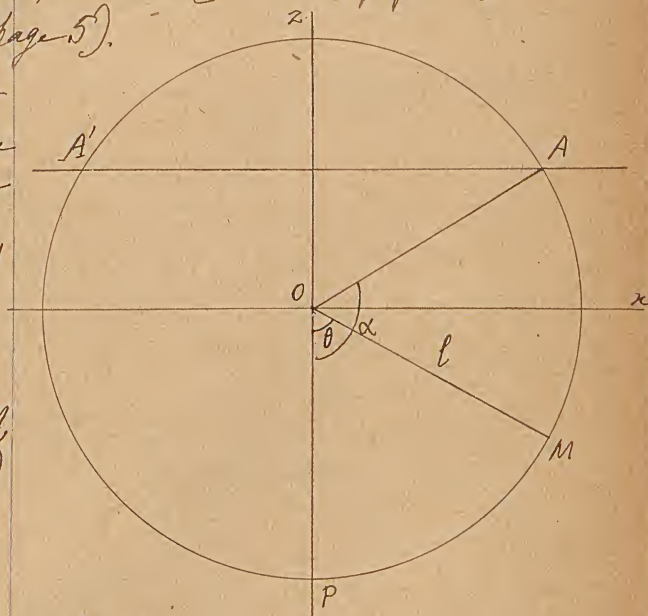
$$\text{Posons: } a = -l \cos \alpha \quad \alpha = \widehat{POA}.$$

L'équation devient:

$$l^2 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = 2gl (\cos \theta - \cos \alpha)$$

d'où l'on tire  $t$  par une quadrature.

$$\text{Condition de réalité: } \cos \theta \geq \cos \alpha \quad \text{d'où: } \theta \leq \alpha.$$





Supposons qu'au début du mouvement  $\theta$  soit croissant:  $v$  a le signe  $+$  et s'annule pour  $\theta = \alpha$ . Or le point  $M$  arrive en  $A$ , car  $t$  reste fini quand  $\theta$  tend vers  $\alpha$ . Alors il retombe de  $A$  sans vitesse initiale:  $v$  devient négatif avec  $\frac{d\theta}{dt}$ : le radical aura le signe  $-$ , jusqu'à ce que  $M$  arrive en  $A'$  avec une vitesse nulle, d'où il retombera, le radical prenant alors le signe  $+$ , et ainsi de suite indéfiniment; le mouvement sera une oscillation entre les positions extrêmes  $A, A'$ . — Calculons le temps dans ce mouvement:

$$\cos \theta = 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

$$\cos \alpha = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$l \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = 4g \left( \sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)$$

$$\sqrt{\frac{g}{l}} dt = \frac{\frac{d\theta}{2}}{\pm \sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}}$$

Prenons le signe  $+$  par exemple:

$$\sqrt{\frac{g}{l}} t = \int_0^{\theta} \frac{d\frac{\theta}{2}}{\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}}$$

$t$  croît avec  $\theta$ , et reste fini pour  $\theta = \alpha$ , car c'est une racine d'ordre  $\frac{1}{2}$ , et l'intégrale reste finie comme  $\int \frac{d\theta}{\sqrt{\theta - \alpha}}$ . On a la valeur de  $t$  en fonction de  $\theta$  par une intégrale elliptique; nous allons la ramener à la forme canonique qui permet d'en faire l'inversion. Posons

$$k^2 = \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$\sin \frac{\theta}{2} = ku$$

$$0 < k \leq 1$$

$$0 \leq u \leq 1$$

$$\frac{\theta}{2} = \arcsin ku$$

$$\frac{d\theta}{2} = \frac{k du}{\sqrt{1 - k^2 u^2}}$$

L'intégrale devient:

$$\sqrt{\frac{g}{l}} t = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{(1 - u^2)(1 - k^2 u^2)}}$$

d'où, en faisant l'inversion:

$$u = \operatorname{sn} \sqrt{\frac{g}{l}} t \quad \sin \frac{\theta}{2} = k \operatorname{sn} \sqrt{\frac{g}{l}} t$$

$$\cos \frac{\theta}{2} = \sqrt{1 - k^2 u^2} = \operatorname{dn} \sqrt{\frac{g}{l}} t$$

Connaissant  $\sin \frac{\theta}{2}$ ,  $\cos \frac{\theta}{2}$ , on

calculera  $\sin \theta$ ,  $\cos \theta$ , et par suite  $x, z$  en fonction de  $t$ .



Pour avoir la durée d'une demi-oscillation (de P en A) on devra prendre l'intégrale entre les limites 0 et 1; ce sera l'intégrale complète de 1<sup>re</sup> espèce; donc:  $\sqrt{\frac{g}{L}} T = K \quad T = K \sqrt{\frac{L}{g}}$ .

K est une fonction du module k, c.à.d. de l'amplitude  $\alpha$  des oscillations. Nous allons développer K suivant les puissances croissantes du module k. On a dans l'intégrale le facteur:

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2u^2}} = (1-k^2u^2)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{Or, } k^2u^2 < 1.$$

On peut donc le développer par la formule du binôme:

$$\begin{aligned} (1-k^2u^2)^{-\frac{1}{2}} &= 1 + \frac{1}{2}k^2u^2 + \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}}{1 \cdot 2} k^4u^4 + \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2}}{1 \cdot 2 \cdot 3} k^6u^6 + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{2}k^2u^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} k^4u^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} k^6u^6 + \dots \end{aligned}$$

Le terme général de ce développement sera:

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} k^{2n} u^{2n}$$

Substituons ce développement dans l'intégrale complète; chaque terme devra être multiplié par  $\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$  et intégré de 0 à 1.

Le coefficient de  $k^{2n}$  dans le développement de K sera:

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \int_0^1 \frac{u^{2n} du}{\sqrt{1-u^2}}$$

L'intégrale qui y figure dépend de n; posons:  $\varphi(n) = \int_0^1 \frac{u^{2n} du}{\sqrt{1-u^2}}$   
Nous allons établir une formule récurrente qui donnera  $\varphi(n)$ ;

on a d'abord:

$$\varphi(0) = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{\pi}{2}.$$



$$\frac{d}{du} (u^{2n-1} \sqrt{1-u^2}) = (2n-1) u^{2n-2} \sqrt{1-u^2} - \frac{u^{2n}}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{(2n-1)u^{2n-2} - 2nu^{2n}}{\sqrt{1-u^2}}$$

Intégrons entre 0 et 1; le 1<sup>er</sup> membre s'annule; on a donc:

$$(2n-1) \varphi(n-1) - 2n \varphi(n) = 0 \quad \varphi(n) = \frac{2n-1}{2n} \varphi(n-1)$$

formule récurrente cherchée, jusqu'à:  $\varphi(1) = \frac{1}{2} \varphi(0)$

On a donc: 
$$\varphi(n) = \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2.4.6 \dots 2n} \cdot \frac{\pi}{2}$$

L'expression générale du développement de K est:

$$K^{2n} \left( \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2.4.6 \dots 2n} \right)^2 \frac{\pi}{2} \quad \text{Le premier, pour } n=0, \text{ est } \frac{\pi}{2}.$$

On a donc: 
$$K = \frac{\pi}{2} \left[ 1 + \left( \frac{1}{2} \right)^2 k^2 + \left( \frac{1.3}{2.4} \right)^2 k^4 + \dots \right]$$

et: 
$$T = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{l}{g}} \left[ 1 + \left( \frac{1}{2} \right)^2 k^2 + \left( \frac{1.3}{2.4} \right)^2 k^4 + \dots \right]$$

Quand  $\alpha$  est très-petit,  $k^2 = \frac{\sin^2 \alpha}{2}$  est très-petit, la série converge très-rapidement, et comme les oscillations employées en physique sont petites, on peut se borner sans erreur sensible aux premiers termes. On voit que T a une limite quand  $\alpha$  tend vers 0; pour  $\alpha$  infiniment petit, on a:

$$T = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{l}{g}}$$

La durée d'une oscillation infiniment petite est donc:  $\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ .

Quand  $\alpha$  est très-petit, on peut négliger la 4<sup>e</sup> puissance de  $\alpha$ , c'est-à-dire faire:  $k^2 = \frac{\alpha^2}{4}$

$$T = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{l}{g}} \left( 1 + \frac{\alpha^2}{16} \right)$$

Telle est la formule employée en physique pour les petites oscillations du pendule.



Examinons maintenant le cas où la vitesse du point mobile ne s'annule en aucun point de la circonférence, c'à d. où le plan  $z = a$  passe au-dessus du cercle  $a > l$ .

Le pendule tournera toujours dans le même sens; la vitesse passera par un maximum:  $\sqrt{2g(a+l)}$  au point le plus bas P, par un minimum:  $\sqrt{2g(a-l)}$  au point le plus haut Q.

$$v^2 = 2g(a-z)$$

$$l^2 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = 2g(a+l \cos \theta)$$

Faisons:  $\cos \theta = 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$

$$l^2 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = 2g(a+l - 2l \sin^2 \frac{\theta}{2})$$

Posons:  $k^2 = \frac{2l}{a+l} < 1$ .

$$l^2 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = 2g(a+l) \left( 1 - k^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)$$

D'où:  $\frac{1}{2} \sqrt{2g \frac{a+l}{l^2}} dt = \frac{d \frac{\theta}{2}}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}}$  et, en intégrant:

$$\lambda t = \int_0^{\theta} \frac{d \frac{\theta}{2}}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}}$$

en posant:  $\lambda = \frac{1}{2} \sqrt{2g \frac{a+l}{l^2}}$

On a  $t$  par une intégrale elliptique de 1<sup>e</sup> espèce, qu'on ramène à la forme canonique en posant:  $\sin \frac{\theta}{2} = u$

On aura, en faisant la inversion:  $u = \operatorname{sn} \lambda t$   $\cos \frac{\theta}{2} = \operatorname{cn} \lambda t$

Connaissant  $\sin \frac{\theta}{2}$ ,  $\cos \frac{\theta}{2}$ , on calculera  $\sin \theta$ ,  $\cos \theta$  en fonction de  $t$ .

Pour avoir la durée d'une demi-révolution, il faudra faire varier  $\theta$  de 0 à  $\pi$ , c'à d.  $\sin \frac{\theta}{2} = u$  de 0 à 1; on aura donc:

$$\lambda T = K$$

intégrale complète de 1<sup>e</sup> espèce.

On connaît  $K$ ; on pourra le développer suivant les puissances de  $k$ .



Si  $k$  est très petit, c.à.d. si  $a$  est très grand, on pourra se contenter des premiers termes de la série, qui sera très convergente.

Étudions enfin le cas limite où la droite :  $z = a$  est tangente au cercle, c.à.d. où l'on a :  $a = l$ . Alors la vitesse s'annule au point supérieur  $Q$ . Dans l'autre cas dont celui-ci est le limite, on a :  $k^2 = 1$ .

L'intégrale elliptique se réduit alors à une intégrale élémentaire qui donne une fonction exponentielle pour  $\theta$  :

$$\lambda dt = \frac{d\frac{\theta}{2}}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\theta}{2}}} = \frac{d\frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2}} \quad \lambda t = \log \operatorname{tg} \left( \frac{\theta}{4} + \frac{\pi}{4} \right)$$

Sans constante arbitraire, car on prend  $t = 0$  pour  $\theta = 0$ .

Si l'on cherche le temps que met le point mobile à arriver en  $Q$ , on trouve qu'il est infini :

$$T = \log \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} = \infty.$$

Ainsi le pendule se rapprochera indéfiniment du sommet sans y arriver jamais. On peut remarquer que cette position asymptotique est une position d'équilibre instable, comme cela a lieu en général quand un point mobile s'approche indéfiniment d'un point fixe sans jamais l'atteindre.

Calculons la réaction normale. Soit  $N$  la valeur comptée positivement sur le rayon  $OM$  depuis  $M$  vers le centre. La projection de la force  $(-mg)$  sur ce rayon, c.à.d. sur la normale, est  $+mg \frac{z}{l}$  ; on a donc :

$$N + mg \frac{z}{l} = \frac{mv^2}{l} \quad \text{Or,} \quad v^2 = 2g(a-z)$$

$$N + mg \frac{z}{l} = \frac{2mg(a-z)}{l} \quad N = \frac{mg}{l} (2a - 3z)$$

On a admis, ce qui est presque évident, que la réaction normale coïncide avec la normale principale. S'il fallait le démontrer, il suffirait de



Rappelons la relation qui correspond à la binomiale:  $N_b + F_b = 0$   
 or  $F_b$  est constamment nulle, donc:  $N_b = 0$ .

L'expression de  $N$  est linéaire en  $z$ ; on voit que  $N$  diminue quand  $z$  augmente, c'est-à-dire quand le mobile s'élève; son maximum a donc lieu en  $P$ , son minimum en  $Q$ .  $N$  peut s'annuler à la hauteur:  $z = \frac{2a}{3}$ , et devenir négative au-dessous de ce plan. — Pour savoir si  $N$  s'annule réellement, il faut distinguer 3 cas.

Supposons d'abord:  $a < 0$  — La droite:  $z = a$  traverse le cercle au-dessous du centre  $O$ , donc la droite:  $z = \frac{2}{3}a$  passe au-dessus de la précédente, et par conséquent le point ne l'atteint pas dans ses oscillations, qui s'arrêtent aux points  $A, A'$ . Sur la réaction normale est toujours positive tant que l'amplitude  $\alpha$  de l'oscillation est inférieure à 1 droit. Supposons ensuite:  $0 < a < \frac{3l}{2}$ . La droite  $z = a$  se trouve au-dessus du centre, et la droite:  $z = \frac{2}{3}a$  coupe la circonférence en 2 points  $B, B'$  situés au-dessous des points  $A, A'$  (s'ils existent.) Le point mobile passe par ces points, et en ces points la réaction normale s'annule en changeant de signe; la pression du point mobile sur la circonférence, égale et opposée à cette réaction, est centripète au-dessus de ces points, tant qu'elle est centrifuge au-dessous. Si le point peut quitter la circonférence du côté intérieur (comme s'il est attaché au centre par un fil flexible) il tombera librement à partir du p.  $B$  ou du p.  $B'$  avec la vitesse qu'il avait en ce point; il décrira donc une parabole osculatrice au cercle en ce point (et par là entièrement déterminée),



car l'accélération (ou la force) étant continue, le rayon de courbure (qui intervient dans la formule de l'accélération normale:  $m \frac{v^2}{r}$ ) doit être continu, c'à.d. qu'au point B la parabole de chute libre (d'axe vertical) a le même rayon de courbure ( $\rho$ ) que le cercle.

Enfin, si:  $a > \frac{3}{2} l$ , la droite:  $x = \frac{2}{3} a$   
ne rencontrera pas la circonférence, et le point mobile exercera  
constamment une réaction centrifuge sur la circonférence;  
donc, même attaché par un fil flexible ou simplement posé à l'inté-  
rieur du cercle, il ne tombera pas.

— Mouvement d'un point pesant sur une cycloïde (Huyghens.)

On suppose que la cycloïde a sa base horizontale et tourne. Sa concavité vers le haut. Soit  $M$  le point génératrice de la cycloïde,  $O$  le point le plus bas de la courbe; on sait que l'arc  $OM$  de la courbe est égal au double de la tangente  $MC$  en comptant l'arc  $S$  à partir

$$s = 2\overline{mc}.$$

Le point M est soumis à l'action normale MN et à son poids mg;  
on a pour la vitesse la formule générale:  $v^2 = 2g(a-z)$

Or:  $z = CP$

$$\kappa = \frac{s^2}{8R}$$

Due:  $\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 2g(a - \frac{s^2}{8R})$

Cette équation différentielle définit  $\underline{s}$  en fonction du temps; ainsi le paramètre  $q$  qui détermine la position du mobile est ici l'arc de la courbe.



On aura  $t$  en fonction de  $s$  par une intégrale élémentaire (on arc sin ou arccos.) — Supposons, pour préciser les conditions initiales, que le point mobile soit abandonné à lui-même en  $M_0$  sans vitesse initiale:  $s_0 = OM_0$   $v_0 = 0 = a \frac{s_0^2}{8R}$   $a = \frac{s_0^2}{8R}$

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{g}{4R} (s_0^2 - s^2) \quad \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{R}} dt = \frac{ds}{\pm \sqrt{s_0^2 - s^2}}$$

On doit prendre le signe  $-$ , car  $s$  diminue quand  $t$  augmente. Si l'on compte le temps à partir de la position  $M_0$  ( $t_0 = 0$ ):

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{R}} t = \arccos \frac{s}{s_0} \quad \text{ou:} \quad s = s_0 \cos\left(\frac{t}{2} \sqrt{\frac{g}{R}}\right)$$

Ainsi  $s$  est une fonction périodique du temps. Le mouvement se compose d'une succession infinie d'oscillations égales.

Calculons le temps que met le point  $M$  à tomber de  $M_0$  en  $O$ : pour cela, cherchons la  $1^{\text{re}}$  valeur de  $t$  qui annule  $s$ : c'est:

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{R}} t = \frac{\pi}{2} \quad \text{ou:} \quad t = \pi \sqrt{\frac{R}{g}}$$

La durée d'une oscillation complète est:  $T = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}}$ .

On voit qu'elle ne dépend pas de  $s_0$ , c'à-d. de l'amplitude des oscillations. Le mouvement du pendule cycloïdal est donc tautochrone même pour les oscillations d'amplitude finie. On peut remarquer que la durée d'une oscillation finie quelconque est égale à celle de l'oscillation infiniment petite d'un pendule circulaire de longueur  $4R$ . C'est d'ailleurs la longueur du rayon de courbure de la cycloïde en  $O$ .

On peut obtenir aisément la réaction normale, car on connaît le rayon de courbure de la cycloïde:  $\rho = 2 MB$ .



36  
Soit  $\alpha$  l'angle de la normale MB avec la verticale BC. Comptons la normale positivement dans le sens MB, c'est-à-dire vers le centre de courbure. La réaction est évidemment dirigée suivant la normale principale (v. page 32-33); elle est donc déterminée par l'équation:

$$N - mg \cos \alpha = \frac{mv^2}{\rho} = \frac{mv^2}{2MB} \quad \text{Or: } MB = \frac{BP}{\cos \alpha} = \frac{2R - z}{\cos \alpha}$$

$$N = mg \cos \alpha + \frac{mv^2 \cos \alpha}{2(2R - z)}$$

$$\text{Faisons: } v^2 = 2g(a - z)$$

$$N = mg \cos \alpha \left[ 1 + \frac{a - z}{2R - z} \right]$$

Considérons le cas particulier où le point M part sans vitesse initiale du point de rebroussement A. On a alors:  $a = 2R$

Puisque  $a$  est la cote du plan horizontal où la vitesse est nulle. Dans ce cas, on a simplement:  $N = 2 mg \cos \alpha$  donc:

Quand le mobile part du sommet sans vitesse initiale, la réaction normale est constamment égale au double de la composante normale du poids.

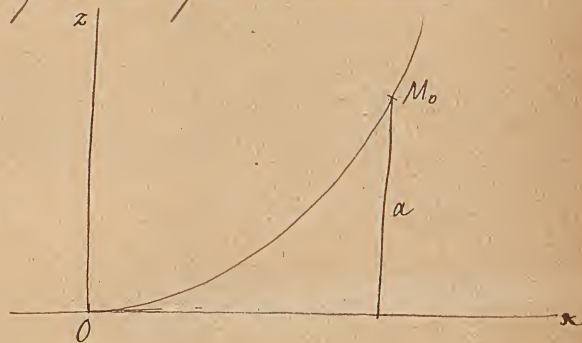
Proposons-nous maintenant de trouver toutes les courbes tautochrones, c'est-à-dire telles qu'un point mobile abandonné sans vitesse initiale en un point quelconque de la courbe <sup>partant</sup> arrive toujours dans le même temps à un point fixe de cette courbe.

Remarquons d'abord qu'il existe une infinité de tautochrones gauches, mais qu'elles se ramènent aux tautochrones planes. Nous avons vu (pag. 26) que le mouvement d'un point sur une courbe gauche ne dépend que de la longueur de cette courbe et de la composante tangentielle de la force.

Projetons horizontalement une courbe tautochrone gauche par un cylindre vertical, et développons ce cylindre sur un plan vertical.



on fait que la courbe devienne plane sans que ses longueurs changent. De plus, la projection du poids d'un point mobile sur la tangente à la courbe ne change pas, puisque l'angle de cette tangente avec chaque génératrice verticale est resté le même. Ainsi le mouvement n'a pas changé dans cette transformation; donc si la courbe gauche est tautochrone, la courbe plane l'est aussi, et réciproquement. On est ainsi ramené à la recherche des courbes tautochrones dans un plan vertical. Nous traiterons ce problème par la méthode de Poiseux.



Soit dans un plan vertical une courbe passant par l'origine; on suppose qu'un point pesant abandonné au point  $M_0$  d'ordonnée  $a$  arrive toujours dans le même temps en  $O$ ; on a alors de vitesse:

$$v^2 = 2g(a-z) \quad \text{donc:} \quad \frac{ds}{dt} = \pm \sqrt{2g(a-z)}$$

Il faut prendre le signe  $-$ , car  $s$ , compté à partir de  $O$ , diminue quand  $t$  augmente:

$$\sqrt{2g} dt = - \frac{ds}{\sqrt{a-z}} = - \frac{\phi'(z) dz}{\sqrt{a-z}}$$

Pour avoir le temps de chute de  $M_0$  en  $O$ , il faut intégrer de  $a$  à  $0$ :  $\sqrt{2g} T = \int_0^a \frac{\phi'(z) dz}{\sqrt{a-z}}$

On a supposé l'arc défini par la relation:

$$s = \phi(z) \quad \text{---}$$

Pour qu'il y ait tautochronisme, il faut que  $T$  soit indépendant de  $a$ . On exprime cette condition en écrivant que la dérivée de  $T$  par rapport à  $a$  est identiquement nulle. Faisons d'abord le changement de variable:  $z = au$



afin de rendre les limites indépendantes du paramètre  $a$ ; les limites pour  $u$  seront 0 et 1:  $\sqrt{2g} T = \int_0^1 \frac{\sqrt{a} \varphi'(au) du}{\sqrt{1-u}}$

Prendons la dérivée par rapport à  $a$ :

$$\begin{aligned} \sqrt{2g} \frac{dT}{da} &= \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u}} \left[ \frac{\varphi'(au)}{2\sqrt{a}} + \sqrt{a} \varphi''(au) u \right] \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{[\varphi'(au) + 2au \varphi''(au)] du}{\sqrt{a(1-u)}} = \frac{1}{2a} \int_0^a \frac{\varphi'(z) + 2z \varphi''(z) dz}{\sqrt{a-z}} \end{aligned}$$

Cette intégrale devant être nulle quel que soit  $a$ , il faut que le numérateur de l'élément différentiel soit identiquement nul:

$$\varphi'(z) + 2z \varphi''(z) = 0 \quad \frac{\varphi''(z)}{\varphi'(z)} = -\frac{1}{2z} \quad \text{Intégrons:}$$

$$\log \varphi'(z) = -\frac{1}{2} \log z + \log C = \log \frac{C}{\sqrt{z}} \quad \varphi'(z) = \frac{C}{\sqrt{z}}$$

$$\text{Intégrons encore:} \quad \varphi(z) = 2C\sqrt{z}$$

La constante d'intégration doit être nulle, car  $\varphi(z) = s = 0$  pour  $z = 0$ . Ainsi:  $s = 2C\sqrt{z} \quad z = \frac{s^2}{4C^2}$

Cette relation caractérise la cycloïde, quand l'arc est compté à partir du point le plus bas:  $z = \frac{s^2}{8R}$

On voit d'ailleurs que:  $\frac{dz}{ds} = 0$  pour  $s = 0$ , ce qui prouve que la tangente en 0 est horizontale. La cycloïde qui répond à la question est donc tangente à l'axe Ox, et elle dépend du seul paramètre C, car:  $2R = C^2$ .

Ainsi la seule courbe tautochrone plane est la cycloïde à base horizontale, et toutes les tautochrones gauches s'obtiennent en enroulant cette courbe sur des cylindres quelconques verticaux.



On peut se proposer de trouver les courbes tautochrones pour d'autres lois de force. Le tautochronisme de la cycloïde, pour la pesanteur, vient de ce que la projection tangentielle du poids est proportionnelle à l'arc compté à partir du point d'arrivée  $O$  (point le plus bas.)

On a en coordonnées intrinsèques l'équation du mouvement sur la courbe:  $m \frac{d^2 s}{dt^2} = -mg \frac{dx}{ds}$  Or:  $z = \frac{s^2}{8R}$   $\frac{dx}{ds} = \frac{s}{4R}$

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = - \frac{mgs}{4R} \quad \text{ou:} \quad \frac{d^2 s}{dt^2} = - \frac{gs}{4R} = -k^2 s$$

C'est l'équation du mouvement rectiligne d'un point attiré par un centre fixe proportionnellement à la distance:  $\frac{d^2 x}{dt^2} = -k^2 x$

Nous avons vu (2e cahier, page 70) que ce mouvement est tautochrone.

On trouve en intégrant:

$$s = A \cos kt + B \sin kt$$

Les 2 constantes  $A$  et  $B$  se déterminent par les conditions initiales.

Le mobile est à la distance  $s_0$  au début ( $t=0$ ) donc:  $A = s_0$ .

Il est abandonné sans vitesse initiale; donc:  $\frac{ds}{dt} = 0$ ,  $B = 0$ .

On a l'équation définitive:  $s = s_0 \cos kt$

Pour avoir la durée de la chute, il suffit de trouver la  $t$  valeur positive qui annule  $s$ :  $kt = \frac{\pi}{2}$  d'où:  $t = \frac{\pi}{2k}$

Cette remarque permet de trouver les courbes tautochrones pour une loi de force quelconque. Soit la force  $F(XYZ)$  qui est supposée ne dépendre que de la position du point mobile. On cherche les courbes telles, qu'on abandonne le point sans vitesse initiale en  $M_0$  point quelconque de une de ces courbes, le temps qu'il met à aller de  $M_0$  à un point fixe  $O$  en suivant la courbe soit le même quel que soit  $M_0$ .



40.  
Supposons la courbe trouvée; la loi du mouvement du point sur la courbe est :  $m \frac{d^2 s}{dt^2} = F_t$  ( $F_t$  projection de  $F$  sur la tangente)

Pour que le tautochronisme ait lieu, il faut et il suffit, d'après la remarque précédente, qu'on ait :  $F_t = -k^2 s$

L'arc  $s$  étant compté à partir du point d'arrivée  $O$ . Remarquons que le point de tautochronisme  $O$  est une position d'équilibre stable pour le point assujéti à glisser sur la courbe, car en ce point :  $F_t = 0$  c'est-à-dire que la force est normale à la courbe. La condition de tautochronisme s'écrit :

$$X \frac{dx}{ds} + Y \frac{dy}{ds} + Z \frac{dz}{ds} = -k^2 s$$

Le problème n'est pas déterminé. Pour le déterminer, on peut assujétir la courbe à se trouver sur une surface donnée, c'est-à-dire imposer à ses coordonnées la nouvelle condition :

$$f(x, y, z) = 0$$

avec la relation accessoire qui définit  $ds$  :  $\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1$ .

Les 3 relations précédentes définissent sur la surface une famille de courbes tautochrones dépendant d'une constante.

Quand il y a une fonction de forces, la 1<sup>re</sup> équation s'intègre immédiatement; elle devient :  $\frac{dV}{ds} = -k^2 s$  d'où :  $V(x, y, z) = -\frac{k^2 s^2}{2} + C$

On a plus qu'une équation différentielle du 1<sup>er</sup> ordre qui, selon  $y$  remplace  $x$  et  $y$  par leurs valeurs tirées des 2 premiers, définit  $z$  en fonction de  $s$ , avec une constante.

Pour obtenir la cycloïde, par exemple, on assujétira la courbe à être dans un plan vertical :  $y = 0$  Fonction des forces :  $V = -mgz$

L'intégrale des forces vives est :  $mgz = \frac{k^2 s^2}{2} + C$

Or puisque le point  $O$  est l'origine, pour  $s = 0$ ,  $z = 0$ , donc  $C = 0$ .



On a une relation de la forme:  
qui caractérise la cycloïde.

$$z = \frac{s^2}{8R}$$

La cycloïde est aussi la courbe brachistochrone ou de plus vite descente pour un point pesant.

Problème: Étant donné 2 points A, B dans l'espace, trouver la courbe joignant ces 2 points telle qu'un point pesant abandonné en A sans vitesse initiale et glissant sans frottement sur la courbe arrive en B dans le moindre temps possible.

On va prouver que c'est une cycloïde à base horizontale ayant le point A pour point de rebroussement.

Prenons pour plan des  $xx'$  le plan vertical de A, B, pour axe des  $x$  l'horizontale de A du côté de B, pour axe des  $z$  une verticale de A dirigée vers le bas. On a d'abord l'intégrale des forces vives:

$$\frac{mv^2}{2} = mgx + C$$

$$v^2 = 2gx$$

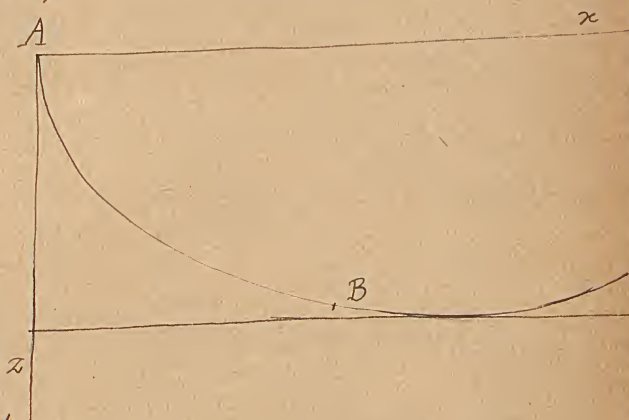
Or pour  $z=0$ ,  $v=0$ ; donc  $C=0$ .

On comptera les arcs  $s$  à partir du pt A:  $\frac{ds}{dt} = \sqrt{2gx}$

$$\sqrt{2g} dt = \frac{ds}{\sqrt{x}}$$

$$\sqrt{2g} I = \int_A^B \frac{ds}{\sqrt{x}}$$

$I$  est le temps de la chute de A en B; il s'agit de trouver la courbe qui rend minimum l'intégrale prise de A en B. — Ce problème a été déjà traité à propos de l'équilibre des fils (2e cah. page 7).





On sait que la courbe qui rend minimum l'intégrale  $\int_A^B \varphi(x, y, z) ds$  est la position d'équilibre d'un fil attaché en A, B, soumis aux forces dérivant du potentiel  $\varphi$  et à la tension  $\varphi$ ; des équations sont:

$$d\left(\varphi \frac{dx}{ds}\right) - \frac{\partial \varphi}{\partial x} ds = 0 \quad d\left(\varphi \frac{dy}{ds}\right) - \frac{\partial \varphi}{\partial y} ds = 0 \quad d\left(\varphi \frac{dz}{ds}\right) - \frac{\partial \varphi}{\partial z} ds = 0$$

Ces 3 équations se réduisent à 2, car en multipliant la 1<sup>re</sup> par  $\frac{dx}{ds}$ , la 2<sup>e</sup> par  $\frac{dy}{ds}$ , la 3<sup>e</sup> par  $\frac{dz}{ds}$  et en ajoutant, on aurait une identité.

Dans le cas présent,  $\varphi = \frac{1}{\sqrt{z}}$ , et on a les équations différentielles:

$$d\left(\frac{1}{\sqrt{z}} \frac{dx}{ds}\right) = 0 \quad d\left(\frac{1}{\sqrt{z}} \frac{dy}{ds}\right) = 0 \quad d\left(\frac{1}{\sqrt{z}} \frac{dz}{ds}\right) - \frac{\partial \frac{1}{\sqrt{z}}}{\partial z} ds = 0$$

Puisqu'elles se réduisent à 2, nous négligerons la 3<sup>e</sup>. Les 2 premières s'intègrent:

$$\frac{1}{\sqrt{z}} \frac{dx}{ds} = C' \quad \frac{1}{\sqrt{z}} \frac{dy}{ds} = C''$$

d'où l'on conclut:  $\frac{dy}{dx} = \frac{C''}{C'} = m$   $y = mx + p$

équation d'un plan vertical. On sait que c'est le plan pris pour plan des  $xz$ , puisqu'il contient A et B. Faisons donc:  $y = 0$ ; la 2<sup>e</sup> équation devient une identité; il ne reste donc, une fois le plan des  $xz$  déterminé, que la 1<sup>re</sup>: écrivons-la sous la forme:

$$\frac{1}{\sqrt{z}} \frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2R}}$$

La constante R sera une longueur

~~Intégrons:~~  $dx^2 = \frac{z}{2R} ds^2 = \frac{z}{2R} (dx^2 + dz^2) \quad dx^2 = \frac{z}{2R-z} dz^2$

$$dx = \pm dz \sqrt{\frac{z}{2R-z}}$$

Nous prendrons au début le signe +, car x croît avec z dans la disposition d'axes que nous avons choisie. On aura, en intégrant, l'équation de la brachistochrone:

$$x = \int_0^z \sqrt{\frac{z}{2R-z}} dz$$



Pour  $z=0$ , on a:  $x=0$ , et  $\frac{dx}{dz}=0$ ; donc la courbe est tangente à la verticale en A. Pour que  $x$  soit réel,  $z$  doit être compris entre 0 et  $2R$ ; il ne peut donc que croître. Tous les éléments étant positifs,  $x$  augmente avec  $z$  jusqu'à  $z=2R$ . En ce point,  $\frac{dx}{dz}=\infty$ ; la courbe est tangente à l'horizontale  $z=2R$ . À partir de là,  $z$  ne peut que décroître, et  $x$  augmentant toujours,  $\frac{dx}{dz}$  change de signe; on prendra alors le signe - pour le radical, jusqu'à ce que  $z=0$ ; on atteint ainsi un point de rebroussement sur  $Ax$ , puis les mêmes valeurs de  $z$  et de  $x$  se reproduisent indéfiniment.

Si l'on pose:  $z=R(1-\cos\alpha)$  on a:  $x=R(\alpha-\sin\alpha)$

ce sont les équations d'une cycloïde rapportée à la base et à son point de rebroussement. La quantité soumise au radical est:

$$\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{\tan^2 \frac{\alpha}{2}}{2} \quad dx = \frac{\tan \frac{\alpha}{2}}{2} d\alpha \quad z = \frac{dx}{d\alpha}$$

Nous allons maintenant chercher les courbes brachistochrones pour une loi de force quelconque. On peut employer la même méthode, pourvu qu'il y ait une fonction de forces:  $V(x, y, z)$  pour  $F(X, Y, Z)$ . Soient  $A(x_0, y_0, z_0)$  le point de départ,  $V_0$  la valeur de  $V$  en ce point: on a l'intégrale des forces vives:

$$\text{car } v_0 = 0 \quad \text{pour } V = V_0. \quad \frac{mv^2}{2} = V - V_0$$

$$\sqrt{\frac{2}{m}} dt = \frac{ds}{\sqrt{V - V_0}} \quad \sqrt{\frac{2}{m}} T = \int_A^B \frac{ds}{\sqrt{V - V_0}}$$

$T$  est le temps de la chute de A en B.

On posera:  $\varphi(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{V - V_0}}$ . On aura, comme ci-dessus, l'équation différentielle distincte; on déterminera les constantes



en écrivant que la courbe passe par les 2 points A et B.  
 Comme l'intégrale  $\int_A^B q ds$  représente le temps (à un <sup>facteur</sup> constant  
 près) les théorèmes relatifs au minimum de cette intégrale  
 ont dans ce cas une signification géométrique très simple. Par  
 exemple, le théorème de Tait et Thomson signifie que, si l'on prend  
 toutes les courbes brachistochrones normales à une même surface, et  
 que l'on porte sur chacune d'elles une longueur AB correspondant  
 à la même valeur de l'intégrale  $\int q ds$ , le lieu des points B sera  
 une surface normale aux courbes. Autrement dit, si l'on fait  
 partir en même temps des points mobiles sur toutes ces courbes à partir  
 de la surface donnée, le lieu de ces points à chaque instant est une  
 surface normale aux courbes.

Appliquons cette conséquence aux cycloïdes issues du point A  
 (on peut les considérer comme normales à une sphère infiniment petite)  
 elles sont toutes homothétiques par rapport à leur point de rebroussement  
 A. Si l'on abandonne au même instant sans vitesse initiale des  
 points pesants sur chaque cycloïde au point A, le lieu de ces points  
 à un instant quelconque sera une surface normale aux cycloïdes,  
 et dans le plan des  $xx$ , une trajectoire orthogonale de la famille  
 des cycloïdes issues du point A comme point de rebroussement.

Nous allons étudier maintenant le mouvement d'un point mobile  
 sur une courbe qui change de position et même de forme avec le temps;  
 les équations de cette courbe seront de la forme:

$$f(x, y, z, t) = 0$$

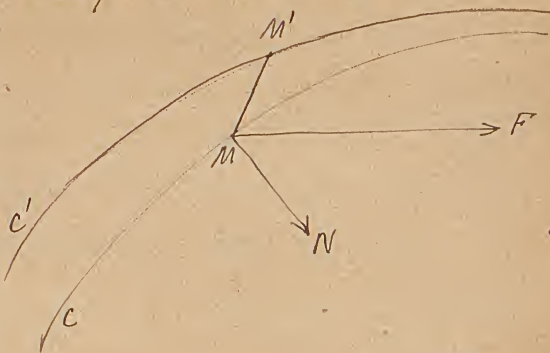
$$f_2(x, y, z, t) = 0.$$

Le point M est soumis à la force donnée  $F(XYZ)$  La réaction de la courbe  
 MN, est toujours normale, car on suppose qu'il n'y a pas de frottement.



Si l'on applique le théorème des forces vives, on n'élimine plus la réaction normale:  $d \frac{MN^2}{2} = Xdx + Ydy + Zdz + T_r \cdot dN$

En effet, si le point est à l'instant  $t$ , en  $M$  sur la courbe  $C$ ; il sera à l'instant  $(t+dt)$  en  $M'$  sur la courbe voisine  $C'$ , et en général le déplacement  $MM'$  ne sera pas normal à  $N$ , c'est-à-dire tangent à  $C$ . Les projections de la



réaction normale ont la même expression que quand la courbe est fixe:  $NN$  est la somme géométrique de 2 vecteurs normaux aux surfaces  $f=0, f_1=0$ ; on a donc les équations du mouvement:

$$\begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} &= X + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} \\ m \frac{d^2y}{dt^2} &= Y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ m \frac{d^2z}{dt^2} &= Z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} \end{aligned}$$

On a ainsi 5 équations qui déterminent  $x, y, z, \lambda, \lambda_1$  en fonction du temps. Mais ce système est assez compliqué, et on peut ramener le problème au minimum d'opérations nécessaires, c'est-à-dire à l'intégration d'une équation différentielle du 2<sup>e</sup> ordre à 1 inconnue: car il suffit d'un paramètre pour déterminer la position du point  $M$ .

Exprimons donc les coordonnées du point  $M$  en fonction d'un paramètre, c'est-à-dire posons:

$$f(x, y, z, t) = q$$

En résolvant les 3 équations  $f, f_1, f_2$  par rapport à  $x, y, z$  on obtiendra:

$$x = \varphi(q, t) \quad y = \psi(q, t) \quad z = \omega(q, t)$$



Si l'on donne à  $t$  une valeur numérique et qu'on laisse  $q$  variable, ces équations représentent la courbe  $C$  à l'instant  $t$ ; de même, elles représentent la courbe  $C'$  à l'instant  $(t+dt)$ . Si  $x, y, z$  sont considérées comme coordonnées du point  $M$ ,  $q$  et  $t$  varieront à la fois, mais comme le pt  $M$  décrit une courbe déterminée,  $q$  doit être une certaine fonction de  $t$ .

Pour trouver cette fonction  $q$ , on emploie la méthode qui sert à trouver les équations de Lagrange. On multiplie les 3 équations du mouvement respectivement par  $\frac{\partial \varphi}{\partial q}$ ,  $\frac{\partial \psi}{\partial q}$ ,  $\frac{\partial \omega}{\partial q}$ ; en ajoutant, les termes qui représentent la réaction normale disparaissent. En effet,  $\frac{\partial \varphi}{\partial q}$ ,  $\frac{\partial \psi}{\partial q}$ ,  $\frac{\partial \omega}{\partial q}$  sont les paramètres directeurs de la tangente à la courbe  $C$ ;  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial z}$  sont ceux de la normale à une des 2 surfaces qui passent par  $C$ ,  $\frac{\partial f_1}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f_1}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial f_1}{\partial z}$  ceux de la normale à l'autre surface; ces 2 normales étant perpendiculaires à la tangente, on a:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial q} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial q} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial \omega}{\partial q} = 0 \quad \frac{\partial f_1}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial q} + \frac{\partial f_1}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial q} + \frac{\partial f_1}{\partial z} \frac{\partial \omega}{\partial q} = 0$$

On a donc l'équation:

$$m \left[ \frac{dx}{dt} \frac{\partial \varphi}{\partial q} + \frac{dy}{dt} \frac{\partial \psi}{\partial q} + \frac{dz}{dt} \frac{\partial \omega}{\partial q} \right] = Q = X \frac{\partial \varphi}{\partial q} + Y \frac{\partial \psi}{\partial q} + Z \frac{\partial \omega}{\partial q}$$

On transformera cette équation comme dans le cas général de 3 paramètres  $q_1, q_2, q_3$ : on marquera par des accents les dérivées par rapport à  $t$ . Pour obtenir: 
$$I = \frac{m}{2} (x'^2 + y'^2 + z'^2)$$
 on tirera des équations en  $(q, t)$  les dérivées:

$$x' = \frac{\partial \varphi}{\partial q} q' + \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

$$y' = \frac{\partial \psi}{\partial q} q' + \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

$$z' = \frac{\partial \omega}{\partial q} q' + \frac{\partial \omega}{\partial t}$$



47

$T$  devient fonction de  $q, q', t$ , quand on y porte ces expressions.  
L'équation du mouvement prend alors la forme de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial q'} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q$$

On peut définir géométriquement  $Q$  par la considération d'un travail virtuel. Imprimons au point  $M$  un déplacement virtuel sur la courbe fixe  $C$ , en donnant à  $t$  une valeur numérique et à  $q$  un accroissement  $dq$ ; les accroissements des coordonnées seront:

$$dx = \frac{\partial \varphi}{\partial q} dq \quad dy = \frac{\partial \psi}{\partial q} dq \quad dz = \frac{\partial \omega}{\partial q} dq$$

et le travail élémentaire de la force pour le déplacement  $(dx, dy, dz)$  sera:

$$X dx + Y dy + Z dz = Q dq$$

Donc, si l'on imprime à  $M$  un déplacement virtuel suivant  $C$  supposée fixe, en exprimant le travail virtuel de la force en fonction de  $q$ , le coefficient de  $dq$  dans cette expression sera  $Q$ .

Si l'on existe une fonction de forces  $V$ , on y remplacera  $x, y, z$  par leurs expressions en  $q, t$ , et on aura:

$$Q = \frac{\partial V}{\partial q}$$

On voit par cet exemple que les équations de Lagrange s'appliquent aussi bien au cas d'une courbe mobile qu'à celui d'une courbe fixe, et qu'elles permettent de ramener le problème à la forme la plus simple.

Application. Considérons un arc vertical  $Ox$ , une droite  $OA$  faisant avec  $Ox$  l'angle constant  $\theta$  et tournant autour de  $Ox$  avec la vitesse angulaire constante  $\omega$ ; cherchons le mouvement d'un point pesant mobile sans frottement sur la droite  $OA$ .

Le point  $M$  est soumis à son poids  $-mg$ , et à la réaction normale.







49

Le point  $O'$  est une position d'équilibre relatif pour le point  $M$ , car si on le posait en ce point sans vitesse initiale ( $\frac{dp}{dt} = 0$ ) il y resterait. C'est de plus une position d'équilibre <sup>relative</sup> instable; car si on l'en écarte infiniment peu, la force tend à l'en éloigner davantage.

En intégrant, on obtient  $p$  en fonction de  $t$ :

$$p = Ae^{\omega t \sin \theta} + Be^{-\omega t \sin \theta} \quad q = p + \frac{g \cos \theta}{\omega^2 \sin^2 \theta}$$

On a eu même temps la trajectoire, ou plutôt sa projection sur le plan horizontal: car:  $Om = q \cdot \sin \theta$  (rayon vecteur) et l'on vient de trouver une relation entre  $q$  et  $\omega t$  (angle plan).

Pour calculer la réaction normale, on peut la décomposer en 2 forces,  $P$  dans le plan  $AOz$ ,  $R$  perpendiculaire à ce plan. On a immédiatement, en projetant les forces sur l'axe  $Oz$ :

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -g + P \sin \theta$$

$$\text{Or: } z = q \cos \theta$$

$$\text{donc: } \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2q}{dt^2} \cos \theta = \frac{dp}{dt} \cos \theta$$

Comme on connaît  $\frac{d^2q}{dt^2}$ , on tire  $P$  d'une équation du 1<sup>er</sup> degré.

Pour trouver  $R$ , on peut projeter les forces sur  $Ox$  ou  $Oy$ ; au mieux, appliquer le théorème des moments des quantités de mouvement:

$$\frac{d}{dt} \left( x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = R q \sin \theta \quad \text{par rapport à } Oz.$$

$$\text{Or: } x dy - y dx = q^2 \sin^2 \theta \cdot \omega dt$$

On tire immédiatement  $R$  d'une équation du 1<sup>er</sup> degré.

On peut aussi calculer la réaction normale en recourant aux équations primitives du mouvement.



Étudions maintenant le mouvement d'un point sur une surface, fixe ou mobile. On peut considérer le point comme libre, à la condition de lui appliquer la réaction normale de la surface. Dans le cas le plus général, la surface est représentée par l'équation :

$$f(x, y, z, t) = 0$$

Si la surface est fixe, le temps ne figurera pas dans  $f$ .

Les forces directement appliquées ont une résultante  $F(X, Y, Z)$ . La réaction normale  $N$  a ses projections proportionnelles à

$$\frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial f}{\partial y} \quad \frac{\partial f}{\partial z}$$

; les équations du mouvement sont donc :

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = X + \lambda \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = Y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = Z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z}$$

Ces 4 équations (en y comprenant l'équation de la surface) définissent les 4 inconnues  $x, y, z, \lambda$  en fonctions du temps. Pour avoir le mouvement du point, on devra éliminer  $\lambda$ ; on aura  $x, y, z$  en fonction de  $t$ . On calculera ensuite  $\lambda$  au moyen des équations mêmes du mouvement. — Quand la surface est fixe, on peut éliminer  $\lambda$  en appliquant le théorème des forces vives :

$$d \frac{mv^2}{2} = X dx + Y dy + Z dz \quad \text{car l'on a pour le coefficient de } \lambda :$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = df(x, y, z) = 0.$$

Ce fait analytique s'interprète géométriquement : si la surface est fixe, le déplacement réel du point  $(dx, dy, dz)$  est normal à la réaction. On a ainsi une 1<sup>e</sup> équation indépendante de  $\lambda$ ; on en obtiendra une 2<sup>e</sup> en éliminant  $\lambda$  entre les autres équations.



Quand la surface est mobile, l'équation des forces vives contient la réaction normale:  $d \frac{mv^2}{2} = Xdx + Ydy + Zdz - \lambda \frac{\delta f}{\delta t} dt$

car:  $df = \frac{\delta f}{\delta x} dx + \frac{\delta f}{\delta y} dy + \frac{\delta f}{\delta z} dz + \frac{\delta f}{\delta t} dt = 0$

On peut se rendre compte géométriquement de ce fait, parce que le déplacement réel du point n'est pas normal à la réaction, la surface ayant varié d'un instant à l'autre.

Dans tous les cas, on peut éliminer  $\lambda$  par la méthode de Lagrange, et réduire le problème à 2 équations (minimum). Pour cela, on exprime les coordonnées de la surface en fonction de 2 paramètres. Analytiquement, cela revient à joindre à l'équation de la surface 2 équations nouvelles:  $f_1(x, y, z, t) = q_1$ ,  $f_2(x, y, z, t) = q_2$ .  
De ces 3 équations on tirera:

$$x = \varphi(q_1, q_2, t) \quad y = \psi(q_1, q_2, t) \quad z = \omega(q_1, q_2, t)$$

Si  $q_1, q_2$  sont les paramètres qui correspondent au point mobile, ce seront des fonctions du temps. Pour connaître le mouvement du point, il suffira de déterminer ces fonctions: on aura donc 2 équations à trouver: c'est le minimum de conditions nécessaires.

Pour cela, on effectuera la combinaison de Lagrange; on multipliera les 3 équations respectivement par  $\frac{\delta \varphi}{\delta q_1}$ ,  $\frac{\delta \psi}{\delta q_1}$ ,  $\frac{\delta \omega}{\delta q_1}$  et on les ajoutera; le résultat sera débarrassé de  $\lambda$ .

Géométriquement, on élimine  $\lambda$  en imprimant au point mobile un déplacement virtuel sur la surface  $S$ : donnons à  $t$  une valeur numérique qui fixe  $S$ , et laissons  $q_2$  fixe; à l'accroissement de  $q_1$  correspondront les accroissements suivants des coordonnées du point:



$$\delta x = \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} \delta q_1, \quad \delta y = \frac{\partial \psi}{\partial q_1} \delta q_1, \quad \delta z = \frac{\partial \omega}{\partial q_1} \delta q_1.$$

Comme ce déplacement s'effectue sur la surface  $S$ , il est perpendiculaire à la réaction normale; aussi son travail virtuel est nul, et  $X$  disparaît:

$$m \left( \frac{d^2 x}{dt^2} \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} + \frac{d^2 y}{dt^2} \frac{\partial \psi}{\partial q_1} + \frac{d^2 z}{dt^2} \frac{\partial \omega}{\partial q_1} \right) = Q_1$$

en posant:  $Q_1 = X \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} + Y \frac{\partial \psi}{\partial q_1} + Z \frac{\partial \omega}{\partial q_1}$

On a de même:  $m \left[ \frac{d^2 x}{dt^2} \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} + \frac{d^2 y}{dt^2} \frac{\partial \psi}{\partial q_2} + \frac{d^2 z}{dt^2} \frac{\partial \omega}{\partial q_2} \right] = Q_2$

en considérant un autre déplacement virtuel sur  $S$  obtenu en faisant varier  $q_2$  seul. — Telles sont les 2 équations du mouvement, dégagées de la réaction normale. En remplaçant  $x, y, z$  par leurs expressions en fonction de  $q_1, q_2, t$ , on aura 2 équations différentielles simultanées du 2<sup>e</sup> ordre définissant  $q_1, q_2$  en fonction de  $t$ . On peut les ramener à la forme de Lagrange: en désignant par des accents les dérivées par rapport à  $t$ , on a:

$$x' = \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} q_1' + \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} q_2' + \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

$$y' = \frac{\partial \psi}{\partial q_1} q_1' + \dots \quad z' = \frac{\partial \omega}{\partial q_1} q_1' + \dots$$

$I = \frac{m}{2} (x'^2 + y'^2 + z'^2)$   
 expressions en  $q_1, q_2, q_1', q_2', t$ ;  $I$  devient une fonction du 2<sup>e</sup> degré en  $q_1', q_2'$ , homogène si  $x, y, z$  ne contiennent pas le temps.

On a alors les 2 équations de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial I}{\partial q_1'} \right) - \frac{\partial I}{\partial q_1} = Q_1$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial I}{\partial q_2'} \right) - \frac{\partial I}{\partial q_2} = Q_2$$

On calculera, comme toujours, les seconds membres  $Q_1, Q_2$  par la



Considération d'un déplacement virtuel obtenu en faisant varier seulement  $q_1$  ou  $q_2$ ; le travail virtuel de la force pour ces déplacements:  $(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)$  prend alors la forme:

$Q_1 \delta q_1$  ou  $Q_2 \delta q_2$  de ou bien tire  $Q_1, Q_2$

S'il existe une fonction des forces:  $V(x, y, z)$   
elle devient, quand on y substitue les expressions de  $x, y, z$ ,  
fonction de  $q_1, q_2$ , et on a:  $Q_1 = \frac{\partial V}{\partial q_1}$   $Q_2 = \frac{\partial V}{\partial q_2}$

Dans le cas d'une surface fixe:  $f(x, y, z) = 0$

on peut toujours exprimer les coordonnées du point mobile en fonction de  $q_1, q_2$ , sans y faire figurer  $t$ ; et comme:

$$T = \frac{m}{2} \frac{ds^2}{dt^2}$$

on peut le calculer aisément

quand on connaît très-bien le élément linéaire  $ds^2$ , qui s'exprime par une forme quadratique en  $dq_1, dq_2$ ; alors  $T$  est le double et du 2<sup>degré</sup> en  $q_1', q_2'$ :

$$T = \frac{m}{2} (Aq_1'^2 + 2Bq_1'q_2' + Cq_2'^2)$$

Examinons le cas le plus simple, celui où le point est lancé sur une surface fixe et n'est sollicité par aucune force:  $F=0$ .  
Il est donc soumis qu'à la réaction normale. L'équation des forces vives nous apprend qu'alors la vitesse est constante;

$$\frac{d(mV^2)}{2} = 0 \quad V = V_0$$

Le point mobile décrit dans ce cas une ligne géodésique de la surface; en effet, quand un mobile se meut librement, le plan osculateur de sa trajectoire contient son accélération, donc la force qui agit sur lui; ici cette force est la réaction normale; par conséquent



le plan osculateur à la courbe décrite par le point contient la normale à la surface, ce qui est la définition des lignes géodésiques.

On a vu (2<sup>e</sup> cahier, page 6) qu'un fil tendu sur une surface et soumis à aucune force, si ce n'est à ses extrémités, se dispose suivant une ligne géodésique de cette surface, et que la tension est la même en tous ses points. La même propriété vient d'être déduite pour la trajectoire d'un point soumis à aucune force, en remplaçant la tension par la vitesse; seulement, dans le cas d'un fil, la réaction normale est dirigée vers la convexité de la courbe, et dans le cas du point mobile, vers la concavité. L'éthérisme des forces vives donne une intégrale première:  $\frac{mv^2}{2} = Cte$  cà d:  $T = Cte$

On a d'ailleurs la force étant nulle:  $Q_1 = 0, Q_2 = 0$ .

Dans le cas général d'une surface fixe et d'une fonction des forces, on peut remplacer une des équations de Lagrange par l'intégrale des forces vives:  $\frac{mv^2}{2} = U + h$

et l'on a le système d'une équation du 2<sup>e</sup> ordre et d'une équation du 1<sup>er</sup>:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{\partial U}{\partial q_i} \quad T = U + h$$

Application. Recherche des lignes géodésiques des surfaces de révolution.

Prendons pour Oz l'axe de révolution. Soit:  $z = \varphi(x)$   
l'équation de la méridienne dans le plan des  $xz$ . L'équation de la surface sera:  $z = \varphi(r)$  en posant:  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$   
distance d'un point de la surface à l'axe, cà d. rayon de son parallèle.  
Cet rayon se projette en vraie grandeur en Om; pour définir le point M, il suffit de donner les coordonnées polaires  $r$  et  $\theta$  de m dans Oxy.



ce seront les paramètres  $q, q_2$  ( $z$  est connu quand  $r$  est donnée.)

Calculons l'élément linéaire de la surface:

$$ds^2 = dr^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2 = (1 + \varphi'^2) dr^2 + r^2 d\theta^2$$

(Nous supposons toujours la masse du point égal à 1.) Donc:

$$T = \frac{1}{2} [(1 + \varphi'^2) r'^2 + r^2 \theta'^2]$$

Les équations de Lagrange sont:

$$\frac{d}{dt} [(1 + \varphi'^2) r'] - \frac{\partial T}{\partial r} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = r^2 \theta' + \varphi' \varphi'' r'^2$$

$$\frac{d}{dt} (r^2 \theta') = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0.$$

Remplaçons la  $r$  par l'intégrale des forces vives:

$$T = h.$$

On a, en intégrant la 2<sup>e</sup>:

$$r^2 \theta' = C \quad \frac{1}{2} [(1 + \varphi'^2) r'^2 + r^2 \theta'^2] = h$$

La 1<sup>re</sup> de ces équations exprime que la projection m tourne autour de  $O$  suivant la loi des aires.

Ce fait était à prévoir, car la seule force qui agit sur  $M$  est la réaction normale, qui est toujours dans un même plan avec  $Oz$  (soit qu'elle rencontre  $Oz$ , soit qu'elle lui soit parallèle.) Pour avoir l'équation de la trajectoire, il faut éliminer le temps entre les 2 équations précédentes:

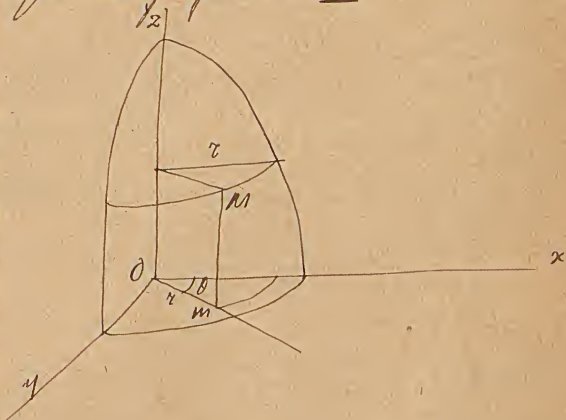
$$(1 + \varphi'^2) dr^2 + r^2 d\theta^2 = 2h dt^2$$

$$\text{Or: } r^2 d\theta = C dt \quad dt = \frac{r^2 d\theta}{C}$$

$$\alpha^2 = \frac{C^2}{2h}.$$

$$(1 + \varphi'^2) dr^2 + r^2 d\theta^2 = \frac{2h}{C^2} r^4 d\theta^2 = \frac{r^4 d\theta^2}{\alpha^2}$$

en posant





$$\left(\frac{z^2}{\alpha^2} - 1\right) z^2 d\theta^2 = (1 + \varphi'^2) dr^2$$

$$d\theta = \pm \frac{dr}{z} \sqrt{\frac{1 + \varphi'^2}{\frac{z^2}{\alpha^2} - 1}}$$

On a  $\theta$  en fonction de  $r$  par une quadrature; c'est l'équation de la projection de la ligne géodésique sur le plan des  $xy$ . La constante d'intégration n'influence pas sur la forme de la courbe, car faire varier cette constante, c'est faire tourner la courbe autour de l'axe  $Oz$ ; sa forme ne dépend donc que du paramètre  $\alpha$ , c'à d. de  $C$  et de  $h$ .

On pourra achever le calcul dans chaque cas particulier, par exemple, pour un hyperboloïde de révolution à une nappe; pour une valeur convenable de  $\alpha$ , on trouvera les génératrices rectilignes de la surface; la réaction normale devra être nulle le long de ces droites, que le point mobile suivra librement. — On peut aussi effectuer les calculs pour la surface engendrée par une chaînette tournant autour de sa base (surface d'aire minimum.)

— Exemple. Recherche des lignes géodésiques d'une surface du 2<sup>e</sup> ordre à centre. — Nous emploierons la méthode de Jacobi (cf p. 10 sq.)

On aura 2 équations du mouvement sous la forme de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} = \frac{\partial V}{\partial q_1}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} = \frac{\partial V}{\partial q_2}$$

Transformation de Poisson:

$$p_1 = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \quad p_2 = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}$$

équations du 1<sup>er</sup> degré en  $\dot{q}_1, \dot{q}_2$ , qu'on résout par rapport à  $\dot{q}_1, \dot{q}_2$ .

On prend:  $K = p_1 \dot{q}_1 + p_2 \dot{q}_2 - T$  et on pose:  $H = K - V$

$H$  est une fonction de  $q_1, q_2, p_1, p_2$  et  $t$ . Les équations canoniques de Hamilton

$$\text{sont: } \frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_1}$$

$$\frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_2}$$

$$\frac{dp_1}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial q_1}$$

$$\frac{dp_2}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial q_2}$$



57

Le théorème de Jacobi ramène l'intégration de ce système à celle d'une équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H\left(q_1, q_2, \frac{\partial V}{\partial q_1}, \frac{\partial V}{\partial q_2}, t\right) = 0$$

L'intégrale complète de cette équation contient 3 constantes ; mais il y en a une additive ( $V$  ne figurant pas dans l'équation) il suffit d'avoir une intégrale contenant 2 constantes non additives :

$$V(q_1, q_2, t, \alpha, \beta)$$

Les équations du mouvement seront alors :  $\frac{\partial V}{\partial \alpha} = \alpha'$   $\frac{\partial V}{\partial \beta} = \beta'$  qui définiront  $q_1, q_2$  en fonction du temps et des 4 constantes arbitraires  $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ . Ce sont les équations finies du mouvement.

— Appliquons cette méthode aux surfaces du 2<sup>e</sup> ordre, en employant les coordonnées elliptiques dans l'espace ; soit l'équation :

$$\frac{x^2}{a-\lambda} + \frac{y^2}{b-\lambda} + \frac{z^2}{c-\lambda} - 1 = 0$$

et soient  $q_1, q_2, q_3$  les 3 paramètres ( $\lambda$ ) des 3 surfaces homofocales du 2<sup>e</sup> ordre passant par un point donné (cà.d. les coordonnées elliptiques de ce point). L'élément linéaire engendré par le déplacement infiniment petit du point est :

$$4ds^2 = M_1 dq_1^2 + M_2 dq_2^2 + M_3 dq_3^2 \quad \text{où :}$$

$$M_1 = \frac{(q_1 - q_2)(q_1 - q_3)}{f(q_1)} \quad \text{en posant : } f(\lambda) = (a-\lambda)(b-\lambda)(c-\lambda)$$

Cherchons les lignes géodésiques de la surface (supposons qu'il s'agit d'un ellipsoïde, car qu' $a, b, c$  soient de même signe) :

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} - 1 = 0$$

Par chaque point  $M$  de cette surface passent 3 surfaces homofocales,



58  
 parmi lesquelles figure l'ellipsoïde, correspondant au paramètre:  
 $q_3 = 0$ . Les 2 autres paramètres  $q_1, q_2$  sont les coordonnées  
 elliptiques du point  $M$  sur l'ellipsoïde. On aura donc pour un  
 déplacement infiniment petit de  $M$  sur l'ellipsoïde, l'élément  
 linéaire:

$$4ds^2 = M_1 dq_1^2 + M_2 dq_2^2 \quad \text{où:}$$

$$M_1 = \frac{(q_1 - q_2)q_1}{f(q_1)}$$

$$M_2 = \frac{(q_2 - q_1)q_2}{f(q_2)}$$

On a alors:  $I = \frac{m}{8} (M_1 q_1'^2 + M_2 q_2'^2)$  ou en posant:

$m = 4$ ,  $I = \frac{1}{2} (M_1 q_1'^2 + M_2 q_2'^2)$  Or:  $K = I$ ,

parce que la surface étant fixe,  $x, y, z$  ne contiennent pas  $t$ , donc  
 $q_1, q_2$  non plus. D'ailleurs, la force étant nulle:  $V = 0$ ;

donc:  $H = I$ . On a:  $p_1 = M_1 q_1'$   $p_2 = M_2 q_2'$

d'où:  $q_1' = \frac{p_1}{M_1}$   $q_2' = \frac{p_2}{M_2}$

$H = \frac{1}{2} \left( \frac{p_1^2}{M_1} + \frac{p_2^2}{M_2} \right)$  Écrivons l'équation de Jacobi:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{M_1} \left( \frac{\partial V}{\partial q_1} \right)^2 + \frac{1}{M_2} \left( \frac{\partial V}{\partial q_2} \right)^2 \right] = 0 \quad \text{ou:}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2(q_1 - q_2)} \left[ \frac{f(q_1)}{q_1} \left( \frac{\partial V}{\partial q_1} \right)^2 - \frac{f(q_2)}{q_2} \left( \frac{\partial V}{\partial q_2} \right)^2 \right] = 0.$$

En chassant le dénominateur, le 1<sup>er</sup> membre se divise en une fonction  
 de  $q_1$  et une fonction de  $q_2$ ; on aura donc une intégrale de la  
 forme:  $V = -ht + \varphi(q_1) + \psi(q_2)$  Substituons:

$$-2h(q_1 - q_2) + \varphi'(q_1)^2 \frac{f(q_1)}{q_1} - \psi'(q_2)^2 \frac{f(q_2)}{q_2} = 0$$



50

Séparons: 
$$-2hq_1 + \frac{\varphi'(q_1)^2 f(q_1)}{q_1} = -2hq_2 + \frac{\psi'(q_2)^2 f(q_2)}{q_2}$$

Pour que cette identité soit vérifiée, il faut que les 2 membres soient égaux séparément à une même constante  $2\alpha$ ; on en tire:

$$\varphi'(q_1) = \sqrt{\frac{(2\alpha + 2hq_1)q_1}{f(q_1)}} \quad \psi'(q_2) = \sqrt{\frac{(2\alpha + 2hq_2)q_2}{f(q_2)}}$$

et la intégrale complète cherchée sera:

$$V = -ht + \int \sqrt{\frac{(2\alpha + 2hq_1)q_1}{f(q_1)}} dq_1 + \int \sqrt{\frac{(2\alpha + 2hq_2)q_2}{f(q_2)}} dq_2$$

Les équations finies du mouvement seront:

$$\frac{\partial V}{\partial h} = h'$$

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha} = \alpha'$$

Nous savons que la 1<sup>re</sup> donne le temps; pour avoir l'équation des lignes géodésiques, et pour trouver la 2<sup>e</sup>, qui est une relation entre  $q_1$  et  $q_2$ ; elle s'écrit:

$$\int \frac{\sqrt{q_1} dq_1}{\sqrt{(2\alpha + 2hq_1)f(q_1)}} + \int \frac{\sqrt{q_2} dq_2}{\sqrt{(2\alpha + 2hq_2)f(q_2)}} = \alpha'.$$

On a 2 quadratures hyperelliptiques à effectuer: en effet,  $f(q_1)$  est du 3<sup>e</sup> degré, donc le radical du dénominateur est du 4<sup>e</sup>; mais le radical du numérateur passe au dénominateur, ce qui donne sous  $\sqrt{\quad}$  un polynôme du 5<sup>e</sup> degré. On fera l'inversion de ces intégrales au moyen des fonctions  $\theta$  à 2 variables indépendantes, suivant la méthode de M. Weierstrass.



Mouvement d'un point pesant sur une sphère fixe: pendule sphérique

Soit  $O$  le centre de la sphère; prenons  $Oz$  vertical dirigé vers le bas; on pourra substituer aux coordonnées  $x$  et  $y$  les coordonnées polaires  $r$  et  $\theta$  dans le plan horizontal de  $O$ ; soit  $l$  la longueur du pendule (rayon de la sphère); on aura:

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad r^2 + z^2 = l^2$$

Il s'agit de trouver 2 équations indépendantes de la réaction normale.

Comme la surface est fixe, le théorème des forces vives en donne une:

$$v^2 = 2gx + h$$

D'autre part le moment de la résultante des forces par rapport à  $Oz$  est nul; le théorème du moment des quantités de mouvement fournit une 2<sup>e</sup> équation, qui exprime que la projection du point  $M$  sur le plan  $xOy$  tourne autour de  $O$  suivant la loi des aires:

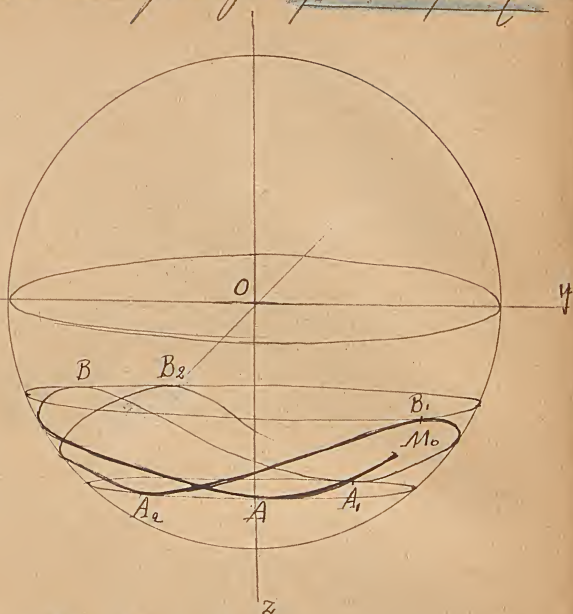
$$r^2 d\theta = C dt$$

On a ainsi 2 intégrales premières du problème, avec 2 constantes qui déterminent les conditions initiales;

$$h = v_0^2 - 2gx_0$$

$C$  est le moment de  $v_0$  par rapport à l'axe  $Oz$ .

La seconde équation montre que le point  $M$  tourne toujours dans le même sens autour de l'axe  $Oz$ , parce que  $\frac{d\theta}{dt}$  a un signe constant. Ce sens est déterminé par celui de la vitesse initiale (si  $v_0$  était dans le même plan que  $Oz$ , on aurait le pendule simple sur une circonférence.) Remplaçons  $v$  par sa valeur dans la 1<sup>re</sup> équation:





$$\frac{dx^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2}{dt^2} = 2gx + h$$

Calculons  $dx$  et  $dt$ :

$$r^2 = l^2 - z^2$$

$$r dr = -z dz$$

$$dx^2 + dz^2 = \left(1 + \frac{z^2}{r^2}\right) dz^2 = \frac{l^2}{r^2} dz^2$$

$$dt = \frac{r^2 d\theta}{C}$$

$$r^2 d\theta^2 + \frac{l^2}{r^2} dz^2 = (2gx + h) \frac{r^4 d\theta^2}{C^2}$$

On a ainsi une relation entre  $z$  et  $\theta$  qui définit la trajectoire sur la sphère:

$$C^2 \frac{l^2}{r^2} dz^2 = r^4 d\theta^2 [(2gx + h) r^2 - C^2]$$

Posons:

$$\varphi(z) = (2gx + h)(l^2 - z^2) - C^2$$

on obtient:

$$d\theta = \pm \frac{C dz}{(l^2 - z^2) \sqrt{\varphi(z)}}$$

L'équation qui donne le temps est:

$$dt = \frac{r^2 d\theta}{C}$$

$$dt = \pm \frac{l dz}{\sqrt{\varphi(z)}}$$

On a ainsi les équations finies du mouvement par des intégrales elliptiques,  $\varphi(z)$  étant du 3<sup>e</sup> degré. Rendons-nous compte d'abord de la nature de ses racines; si l'on substitue dans  $\varphi(z)$  les valeurs:

$$-\infty, \quad -l, \quad z_0, \quad +l, \quad +\infty$$

on trouve:

$$+ \quad - \quad + \quad - \quad -$$

En effet, pour  $z = \pm l$ ,  $\varphi(z) = -C^2$ ; or  $C^2 > 0$ , sans quoi le mouvement se ferait dans un plan vertical (pendule simple); d'autre part, pour  $z = z_0$ , on a nécessairement  $\varphi(z) > 0$ , sans quoi  $\left(\frac{dz}{dt}\right)$  serait imaginaire, ce qui est impossible, la vitesse initiale étant toujours une donnée réelle.

$\varphi(z)$  a donc ses 3 racines réelles  $\alpha, \beta, \gamma$  dans l'ordre de grandeur:

$$l > \underline{\alpha} > z_0 > \underline{\beta} > -l > \gamma$$



On peut donc écrire:

$$\varphi(z) = -2g(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma) = 2g(\alpha-z)(z-\beta)(z-\gamma).$$

Supposons d'abord:

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)_0 > 0$$

On devra prendre au début du mouvement les 2 radicaux avec le signe  $+$ ; donc  $z$  croît, c'est le mobile descend, jusqu'à ce que  $z = \alpha$ ; (puisque  $z_0$  est compris entre  $\alpha$  et  $\beta$ )  $z$  ne peut dépasser  $\alpha$ , car  $\varphi(z)$  deviendrait négatif, donc  $\frac{dz}{dt}$  imaginaire;  $\alpha$  est donc le maximum de  $z$ ; d'ailleurs, pour  $z = \alpha$ ,  $\frac{dz}{dt} = 0$ , donc la vitesse est horizontale, c'est la trajectoire est tangente au parallèle  $z = \alpha$  au point A. A partir de ce point,  $z$  décroît, donc  $\frac{dz}{dt} < 0$ , on devra prendre les radicaux avec le signe  $-$ , jusqu'à ce que  $z = \beta$ , où  $\frac{dz}{dt}$  s'annule de nouveau. La trajectoire est tangente en B au parallèle  $z = \beta$ , qui correspond au minimum de  $z$ . Puis  $z$  croît de nouveau, les radicaux reprennent le signe  $+$ , et ainsi de suite, la trajectoire va du cercle  $z = \alpha$  au cercle  $z = \beta$  en les touchant alternativement.

Il est aisé de voir que les branches successives de la trajectoire, comprises entre 2 contacts consécutifs avec les cercles extrêmes, sont symétriques les unes des autres par exemple, les branches AB et BA, sont symétriques par rapport au plan méridien de B; en effet,  $\theta$  ne dépend que de  $z$ , donc à des variations égales de  $z$  correspondent des variations égales de  $\theta$ . Il suffit donc d'avoir une seule branche AB pour avoir son prolongement symétrique BA, puis toutes les branches successives en faisant tourner la courbe sphérique ABA, autour de Oz de manière à amener A en coïncidence avec A.



On peut remarquer que le plan moyen  $z = \frac{\alpha + \beta}{2}$  est toujours au-dessous du centre : en effet, le coefficient de  $z$  dans  $Q(z)$  est la somme des produits des racines 2 à 2 :

$$2gl^2 = -2g(\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta) \quad l^2 + \alpha\beta = -\gamma(\alpha + \beta)$$

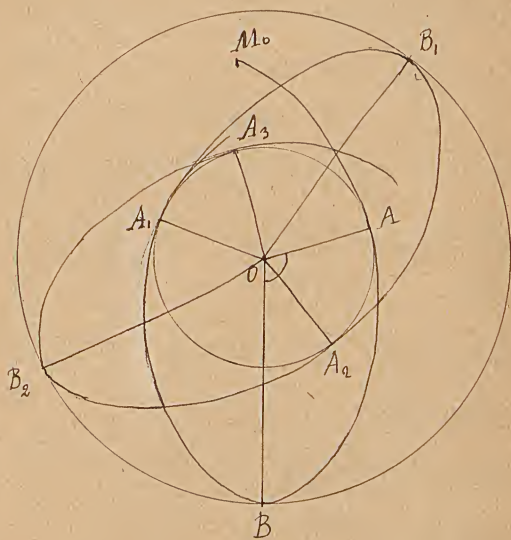
Or  $\alpha\beta < l^2$ , puisque  $\alpha$  et  $\beta$  sont compris entre  $-l$  et  $+l$  ; donc  $\alpha + \beta > 0$ , attendu que  $\gamma < 0$ . On peut écrire :

$$-\gamma = \frac{l^2 + \alpha\beta}{\alpha + \beta}$$

La 3<sup>e</sup> racine s'exprime au moyen des 2 premières.

Étudions la projection de la trajectoire sur le plan horizontal. Nous distinguerons 2 cas :

1<sup>o</sup>  $\beta > 0$  ; les 2 parallèles extrêmes sont au-dessous du centre ; le parallèle  $\beta$  enveloppe, en projection, le parallèle  $\alpha$ . La projection de la trajectoire est une courbe convexe tournant toujours dans le même sens autour de  $O$  et touchant alternativement les 2 parallèles ; ses branches successives sont symétriques,  $AB, BA_1$  par rapport à  $OB$  ;  $BA_1, A_1B_1$  par rapport à  $OA_1$ , etc, de sorte que  $OB, OA_1$ , etc. sont des axes de la courbe.



Quand on observe un pendule sphérique oscillant, il semble décrire une espèce d'ellipse sphérique qui tourne autour de la verticale ( $Oz$ ) dans le sens du mouvement. Cette apparence tient à ce que l'angl.  $AOB$



est plus grand qu'un droit. Si, en effet, l'angle  $AOB$  était droit, l'ellipse paraîtrait fixe, et s'il était inférieur à un droit, elle semblerait rétrograder sur le mouvement du pendule.

2<sup>o</sup>  $\beta < 0$  ; on a toujours :  $\alpha > 0$ , donc les 2 parallèles sont de part et d'autre du centre, mais le parallèle supérieur est plus près de l'équateur que le parallèle inférieur. En projection, l'équateur enveloppe le cercle  $B_2$  qui entoure le cercle  $\alpha$ . La projection de la trajectoire est tangente non-seulement aux 2 parallèles, mais encore à l'équateur, qui est le contour apparent de la sphère : elle touche donc successivement les 3 cercles en  $A, C, B, C_1, A_1, C_2, B_1, \dots$  et l'on a toujours :  $\hat{AOB} > \frac{\pi}{2}$ .

Nous allons démontrer analytiquement cette propriété, d'après Poiseux. L'angle  $AOB$  a pour valeur :

$$\Theta = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{C dx}{(l^2 - x^2) \sqrt{\varphi(x)}}$$

Remplaçons  $\gamma$  dans  $\varphi(x)$  par son expression en fonction de  $\alpha, \beta$  :

$$\varphi(x) = 2g(\alpha - x)(x - \beta) \left( x + \frac{l^2 + \alpha\beta}{\alpha + \beta} \right) = \frac{2g}{\alpha + \beta} (\alpha - x)(x - \beta) [x(\alpha + \beta) + l^2 + \alpha\beta]$$

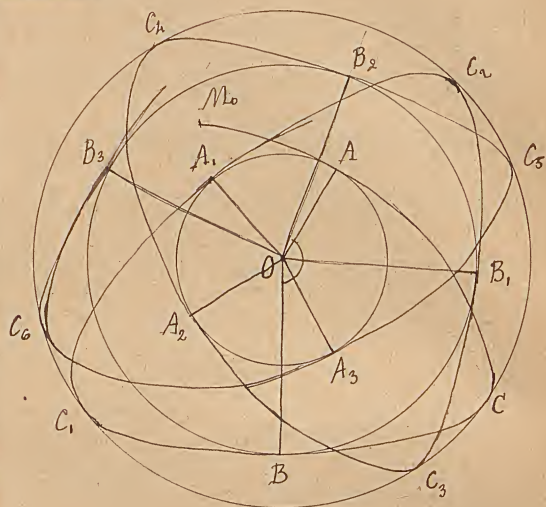
D'autre part :  $\varphi(l) = -C^2$

$$-C^2 = \frac{2g}{\alpha + \beta} (\alpha - l)(l - \beta)(l + \alpha)(l + \beta)$$

$$\text{Posons : } A = \sqrt{(l - \alpha)(l - \beta)}$$

$$C^2 = \frac{2g}{\alpha + \beta} (l - \alpha)(l - \beta)(l + \alpha)(l + \beta)$$

$$B = \sqrt{(l + \alpha)(l + \beta)}$$





$$C = AB \sqrt{\frac{2g}{\alpha + \beta}}$$

On a donc:

$$\Theta = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{AB \ell dx}{\ell^2 - z^2 \sqrt{(\alpha - z)(z - \beta)[z(\alpha + \beta) + \ell^2 + \alpha\beta]}}$$

par une intégrale elliptique. — Nous aurons des limites de  $\Theta$  en remplaçant le dernier facteur du radical par des limites  $P$  et  $Q$ :

$$P < z(\alpha + \beta) + \ell^2 + \alpha\beta < Q$$

$z$  variant de  $\alpha$  à  $\beta$ . On aura par suite:

$$\frac{AB}{\sqrt{Q}} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\ell dx}{(\ell^2 - z^2) \sqrt{(\alpha - z)(z - \beta)}} < \Theta < \frac{AB}{\sqrt{P}} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\ell dx}{(\ell^2 - z^2) \sqrt{(\alpha - z)(z - \beta)}}$$

Calculons l'intégrale:  $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{\ell dx}{(\ell^2 - z^2) \sqrt{(\alpha - z)(z - \beta)}} = I.$

$$\frac{\ell}{\ell^2 - z^2} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\ell + z} + \frac{1}{\ell - z} \right]$$

Posez:  $z = \alpha \cos^2 u + \beta \sin^2 u$

$$dz = 2(\beta - \alpha) \sin u \cos u du$$

$$\sqrt{(\alpha - z)(z - \beta)} = (\alpha - \beta) \sin u \cos u$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\ell + \alpha \cos^2 u + \beta \sin^2 u} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\ell - \alpha \cos^2 u - \beta \sin^2 u}$$

Posez:  $\sqrt{\frac{\ell + \beta}{\ell + \alpha}} \tan u = x$

$\sqrt{\frac{\ell - \beta}{\ell - \alpha}} \tan u = y$

$$I = \frac{1}{B} \int_0^{\infty} \frac{dx}{1 + x^2} + \frac{1}{A} \int_0^{\infty} \frac{dy}{1 + y^2} = \frac{\pi}{2} \left( \frac{1}{A} + \frac{1}{B} \right) = \frac{\pi(A+B)}{2AB}$$

On a donc:  $\frac{\pi}{2} \frac{A+B}{\sqrt{Q}} < \Theta < \frac{\pi}{2} \frac{A+B}{\sqrt{P}}$

Il reste à déterminer les limites  $P, Q$ . Or le coefficient de  $z$ , dans l'expression qui doit être comprise entre  $P$  et  $Q$ , quand  $z$  est compris



entre  $\alpha$  et  $\beta$ , est positive  $\{(\alpha + \beta)$ ; donc cette quantité est croissante avec  $z$ .  
D'ailleurs  $z$  reste toujours compris entre  $-l$  et  $+l$ ; on aura donc des limites supérieure et inférieure en remplaçant dans cette expression  $z$  par  $+l$ ,  $-l$ :

$$A^2 < z(\alpha + \beta) + l^2 + \alpha\beta < B^2$$

On peut donc faire:  $P = A^2$ ,  $Q = B^2$ ; on aura pour  $\hat{A}\hat{O}\hat{B}$  les limites:  $\frac{\pi}{2} \cdot \frac{A+B}{B} < \Theta < \frac{\pi}{2} \cdot \frac{A+B}{A}$

Ces 2 limites sont supérieures à  $\frac{\pi}{2}$ , ce qui démontre le théorème.  
— On peut obtenir des limites plus rapprochées, mais d'une forme moins simple, en remplaçant  $z$  par des valeurs extrêmes  $\alpha$  et  $\beta$ :

$$\beta^2 + 2\alpha\beta + l^2 < z(\alpha + \beta) + l^2 + \alpha\beta < \alpha^2 + 2\alpha\beta + l^2$$

On a alors: 
$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{A+B}{\sqrt{\beta^2 + 2\alpha\beta + l^2}} < \Theta < \frac{\pi}{2} \cdot \frac{A+B}{\sqrt{\alpha^2 + 2\alpha\beta + l^2}}$$

Ces limites peuvent servir dans le cas où  $\alpha$  et  $\beta$  sont très voisins. Il peut même arriver que  $\alpha$  et  $\beta$  fussent égaux, c'est-à-dire que le point mobile décrive rigoureusement une parallèle de la sphère. Pour cela, il faut évidemment que la vitesse initiale soit parallèle tangente au parallèle  $z_0$ : alors un des 2 racins  $\alpha, \beta$ , est égale à  $z_0$ ; on écrira que l'autre racine est aussi égale à  $z_0$ , en annulant le dérivé  $\varphi'(z)$ , et on aura une équation de condition qui déterminera l'intensité de la vitesse initiale.

Supposons donc  $\alpha = \beta$ ; on a:  $A = l - \alpha$   $B = l + \alpha$ .  
Les 2 limites de  $\Theta$  devenant égales, on a exactement  $\hat{A}\hat{O}\hat{B} =$

$$A\hat{O}B = \frac{\pi l}{\sqrt{l^2 + 3\alpha^2}} = \frac{\pi l}{\sqrt{l^2 + 3z_0^2}}$$



67

Supposons les oscillations infiniment petites; le pendule s'écartant  
infiniment peu de  $OZ$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  sont infiniment voisins de  $l$ ;  
on a alors:  $AOB = \frac{\pi l}{\sqrt{4l^2}} = \frac{\pi}{2}$ .

Ainsi l'angle  $AOB$  tend vers  $\frac{\pi}{2}$  quand les oscillations deviennent  
infiniment petites. — Nous allons retrouver ce résultat en étudiant  
directement les oscillations infiniment petites.

— Écrivons les équations ordinaires du mouvement, ou figure la  
réaction normale  $N$  (cosinus directeurs  $\frac{x}{l}$ ,  $\frac{y}{l}$ ,  $\frac{z}{l}$ ):

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -N \frac{x}{l} \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = -N \frac{y}{l} \quad m \frac{d^2z}{dt^2} = -N \frac{z}{l} + mg$$

Dans les oscillations infiniment petites,  $x$  et  $y$  sont infiniment  
petits; on négligera les infiniment petits de ordre supérieur au 1<sup>er</sup>;

$$z = \sqrt{l^2 - (x^2 + y^2)} = l \left( 1 - \frac{x^2 + y^2}{l^2} \right)^{\frac{1}{2}} = l + \frac{1}{2} \frac{x^2 + y^2}{l} + \dots$$

En négligeant  $x^2$ ,  $y^2$ ;  $z = l$  aux inf. petits près du 2<sup>e</sup> ordre.  
Cela revient à identifier la surface de la sphère avec le plan tangent,  
et à étudier le mouvement du point dans ce plan.

$$\frac{dz}{dt^2} = 0, \quad \text{donc: } N = mg \quad \frac{dx}{dt^2} = -\frac{g}{l} x \quad \frac{dy}{dt^2} = -\frac{g}{l} y.$$

On a, dans le plan tangent, le mouvement d'un point attiré par  
un centre fixe proportionnellement à la distance. Les intégrales  
sont:

$$x = A \cos t \sqrt{\frac{g}{l}} + B \sin t \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$y = A' \cos t \sqrt{\frac{g}{l}} + B' \sin t \sqrt{\frac{g}{l}}$$

On sait que le mobile décrit une ellipse ayant pour centre le pôle  
de la sphère. Il en résulte que l'angle  $AOB$  du rayon maximum



et du rayon minimum, est égal à  $\frac{\pi}{2}$ .

- Pour avoir  $N$  en général, il suffit de multiplier les 3 équations du mouvement respectivement par  $x$ ,  $y$ ,  $z$  et de les ajouter :

$$m \left( x \frac{d^2x}{dt^2} + y \frac{d^2y}{dt^2} + z \frac{d^2z}{dt^2} \right) = -Nl + mgz$$

Or l'équation de la sphère donne :

$$x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} + z \frac{dz}{dt} = 0$$

$$\text{d'où : } x \frac{d^2x}{dt^2} + y \frac{d^2y}{dt^2} + z \frac{d^2z}{dt^2} + \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 = 0$$

$$\text{Donc : } -m v^2 = -Nl + mgz \quad \text{Or : } v^2 = 2gz + h$$

$$-m(2gz + h) = -Nl + mgz$$

$$N = \frac{m}{l}(3gz + h)$$

$N$  est fonction linéaire de  $z$ , elle varie donc dans le même sens que  $z$  ou en sens inverse de la hauteur. Elle peut devenir négative ; alors, si le point mobile est simplement posé à l'intérieur de la sphère, ou attaché au centre par un fil flexible, il tombera en chute libre. Si au contraire il ne peut quitter la sphère, la trajectoire se poursuivra conformément aux calculs, mais sa projection horizontale aura des inflexions aux points où  $N$  s'annule et change de signe. En effet, en ces points, la résultante des forces se réduit au poids : or on sait que le plan osculateur à la trajectoire contient cette résultante ; donc aux points où  $N=0$ , le plan osculateur sera vertical, et comme la courbe le traverse, sa projection traversera sa tangente, c'est-à-d. aura un point d'inflexion.



## Mouvement relatif d'un point matériel.

On a vu en cinématique que dans le mouvement d'un point  $M$  rapporté à un système  $S$  mobile lui-même dans l'espace absolu, on a entre les vitesses et accélérations de ce point les relations géométriques:

$$(V_A) = (V_R) + (V_E)$$

$$(J_A) = (J_R) + (J_E) + (J_C)$$

L'accélération complémentaire a une signification géométrique découverte par Coriolis. Soit  $\omega$  la rotation instantanée du système  $S$ , qu'on peut toujours faire passer par le point mobile  $M$ ; on a:

$$J_C = 2\omega \cdot V_R \cdot \sin(\omega, V_R)$$

Ce vecteur est appliqué en  $M$  et dirigé perpendiculairement au plan de  $\omega$  et de  $V_R$ , du côté où tournait  $V_R$  si la rotation  $\omega$  s'effectuait autour du point  $M$ . On peut donc dire que  $J_C$  est le double du moment du vecteur  $M\omega$  par rapport au point  $V_R$ , tant en grandeur qu'en direction.

Telle est la relation qui définit géométriquement le vecteur  $J_C$  dans l'espace. — Analytiquement, on considère un système d'axes fixes  $O, x, y, z$ , et des axes mobiles  $Ox', y', z'$  invariablement liés au système de comparaison  $S$ , et auxquels on rapporte le mouvement relatif du point  $M$ . Le mouvement du système mobile dans le système fixe est défini par  $x_0, y_0, z_0$ , coordonnées de l'origine  $O'$ , et les 3 cosinus directeurs, exprimés en fonctions du temps —  $x, y, z$  étant les coordonnées relatives du point  $M$ , les projections



de  $V_R$  sur les axes mobiles sont:

$$\frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dz}{dt}$$

Celles de  $T_R$  sur les mêmes axes sont:

$$\frac{dx}{dt^2}, \quad \frac{dy}{dt^2}, \quad \frac{dz}{dt^2}$$

D'autre part, les projections de  $\omega$

sur les axes mobiles étant  $p, q, r$ , celles de  $T_\omega$  sur les mêmes axes sont:

$$2\left(q \frac{dz}{dt} - r \frac{dy}{dt}\right) \quad 2\left(r \frac{dx}{dt} - p \frac{dz}{dt}\right) \quad 2\left(p \frac{dy}{dt} - q \frac{dx}{dt}\right)$$

On suppose maintenant le point mobile sollicité par une force  $F$  agissant pour projections sur les axes fixes:  $X, Y, Z$ , et l'on demande le mouvement relatif du point  $M$  dans le système mobile  $Oxyz$ .

Pour cela, on peut se servir des équations de Lagrange, qui définissent en général le mouvement d'un point dans un système quelconque de coordonnées fixes ou mobiles  $q_1, q_2, q_3$ . Ici, il s'agit de trouver le mouvement dans le système  $(xy z)$  dont le mouvement est connu, étant donné le mouvement dans le système fixe  $(xy z_0)$ .

Les relations qui lient les nouvelles coordonnées aux anciennes sont les formules de transformation:

$$x_1 = x_0 + \alpha x + \alpha_1 y + \alpha_2 z$$

$$y_1 = y_0 + \beta x + \beta_1 y + \beta_2 z$$

$$z_1 = z_0 + \gamma x + \gamma_1 y + \gamma_2 z$$

où  $x_0, y_0, z_0$  et les  $\alpha$  cosinus sont des fonctions connues du temps: on a ainsi  $x_1, y_1, z_1$  exprimés en fonction de  $x, y, z, t$ , et l'on peut appliquer la méthode de Lagrange. On calcule d'abord:

$$T = \frac{m}{2} \left( x_1'^2 + y_1'^2 + z_1'^2 \right)$$

On tire  $x_1', y_1', z_1'$  des formules précédentes, et l'on exprime ainsi  $T$



en fonction de  $x, y, z, x', y', z'$  et  $t$ . On écrit les équations:

71

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial x'} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = X \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial y'} \right) - \frac{\partial T}{\partial y} = Y \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial z'} \right) - \frac{\partial T}{\partial z} = Z$$

Il est facile de voir que les seconds membres de ces équations sont précisément les projections de la force  $F$  sur les axes mobiles.

On sait en effet que pour avoir  $Q_1$ , on fait varier  $q_1$  seul, et que le travail élémentaire de  $F$  dans le déplacement virtuel ainsi obtenu est  $Q_1 \delta q_1$ . Ici, le déplacement  $\delta x$  sera

parallèle à  $Ox$ , et le travail virtuel de la force sera  $X \delta x$ ;

on voit que  $X$  est bien égal à la projection de  $F$  sur  $Ox$ .

On arriverait au même résultat analytiquement, en écrivant:

$$Q_1 = X_1 \frac{\partial q}{\partial x} + Y_1 \frac{\partial q}{\partial y} + Z_1 \frac{\partial q}{\partial z} = \alpha X_1 + \beta Y_1 + \gamma Z_1 = X.$$

Mais on peut obtenir immédiatement les équations du mouvement relatif sans passer par les formules de Lagrange.

Pour cela, il suffit de recourir à la formule qui exprime le théorème de Coriolis:

$$(J_A) = (J_R) + (J_E) + (J_C)$$

et de remarquer que, en vertu du théorème fondamental de la dynamique,  $J_A$  est la force divisée par la masse:  $J_A = \frac{F}{m}$ .

Exprimons analytiquement cette égalité géométrique; nous aurons 3 égalités entre les projections sur les 3 axes mobiles:

$$\frac{X}{m} = \frac{d^2 x}{dt^2} + J_{E_x} + J_{C_x} \quad \text{ou:} \quad m \frac{d^2 x}{dt^2} = X - m J_{E_x} - m J_{C_x}$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = Y - m J_{E_y} - m J_{C_y}$$

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = Z - m J_{E_z} - m J_{C_z}$$



Telles sont les équations du mouvement relatif qui définissent  $x, y, z$  en fonction de  $t$ . —  $X, Y, Z$  sont connus;  $J_c$  également; le seul terme compliqué est celui qui vient de  $J_E$ ; il dépend du mouvement d'entraînement, et devra se calculer dans chaque cas particulier. — On le trouve en développant les équations de Lagrange.

Pour pouvoir énoncer et se rappeler les équations du mouvement relatif, on convient d'appeler force centrifuge le vecteur  $-m J_E$ , et force centrifuge composée le vecteur  $-m J_c$ . En considérant les axes  $Oxyx$  comme fixes et les vecteurs  $-m J_E$  et  $-m J_c$  comme des forces appliquées au point mobile, on peut résumer les équations de la manière suivante: Ce sont les équations du mouvement absolu, dans le système  $(Oxyx)$  supposé fixe, du point  $M$  sollicité par la force donnée  $F$ , par la force centrifuge et par la force centrifuge composée. — Mais il ne faut pas oublier que ce sont des forces fictives, et non des forces réelles; ce sont des noms donnés pour la commodité du langage aux quantités analytiques qui figurent dans les équations.

Grâce à ce théorème, tout mouvement relatif peut se ramener à un mouvement absolu, et tout problème de mouvement relatif se traduit en un problème de mouvement absolu.

— On peut effectuer sur les équations du mouvement relatif la combinaison des forces vives (en multipliant par  $dx, dy, dz$ ):

$$d \frac{mv^2}{2} = X dx + Y dy + Z dz - m [J_{Ex} dx + J_{Ey} dy + J_{Ez} dz]$$

Les termes provenant de  $J_c$  disparaissent dans cette combinaison, parce que  $J_c$  est perpendiculaire à la vitesse relative (par définition.)



Le travail de cette force fictive est donc nul dans le mouvement supposé absolu:

$$J_{Ex} \frac{dx}{dt} + J_{Ey} \frac{dy}{dt} + J_{Ez} \frac{dz}{dt} = 0$$

Cela fait résulter aussi des expressions analytiques de  $J_{Ex}$ ,  $J_{Ey}$ ,  $J_{Ez}$ .  
Appliquons les équations du mouvement relatif au cas particulier de l'équilibre relatif.

Un point mobile  $M$  est dit en équilibre relatif quand il est immobile dans le système mobile, c'est-à-dire quand ses coordonnées relatives  $x, y, z$  sont fixes. Pour cela, il faut et il suffit que les forces  $F$ ,  $-m J_E$ ,  $-m J_C$  se fassent équilibre dans le système  $Oxyz$  supposé fixe. Or, par hypothèse,  $V_R$  est nulle, donc  $J_C$  l'est aussi. On a donc les conditions:

$$X - m J_{Ex} = 0$$

$$Y - m J_{Ey} = 0$$

$$Z - m J_{Ez} = 0$$

qui expriment que la force donnée est égale et opposée à la force centrifuge.

Application: Équilibre d'un point à la surface de la terre.

Pour rechercher les conditions de cet équilibre relatif, nous nous tiendrons compte que du mouvement de rotation de la terre sur elle-même, en supposant son centre fixe dans l'espace, ce qui n'altère pas sensiblement les résultats.

Soit l'axe de la terre  $PP'$ , et  $P\omega$  le vecteur qui représente sa rotation, dirigé du pôle  $N$  vers le pôle  $S$ . Soit un point  $M$  à la surface de la terre; pour préciser la force qui le supporte, supposons-le suspendu par un fil attaché en  $C$ . Les forces qui agissent sur lui sont: la tension  $T$



du fil et l'attraction  $A$  de la terre. Il n'y a pas d'autre force appliquée au point  $M$ ; mais ces 2 forces ne se font pas équilibre, puisque le point  $M$ , au lieu de décrire une droite, tourne autour de  $PP'$  avec une vitesse angulaire:

$$\omega = \frac{2\pi}{24 \cdot 60^2} \text{ (par seconde.)}$$

D'autre part, la tension du fil est ce que nous avons appelé (1<sup>er</sup> cahier, page 62) le poids du point matériel:  $T = mg$ .

Pour écrire les équations de l'équilibre relatif, il faut exprimer qu'il y a équilibre entre les forces directement appliquées et la force centrifuge. Calculons celle-ci, c'est-à-dire  $T_E$ . Le point  $M$ , étant immobile par rapport à la terre, décrit un cercle ayant pour axe  $PP'$  et pour rayon  $r$ , avec la vitesse uniforme  $\omega$ . On sait que dans ce cas l'accélération est normale et égale à:

$$\frac{v^2}{\rho} = \frac{\omega^2 r^2}{r} = \omega^2 r.$$

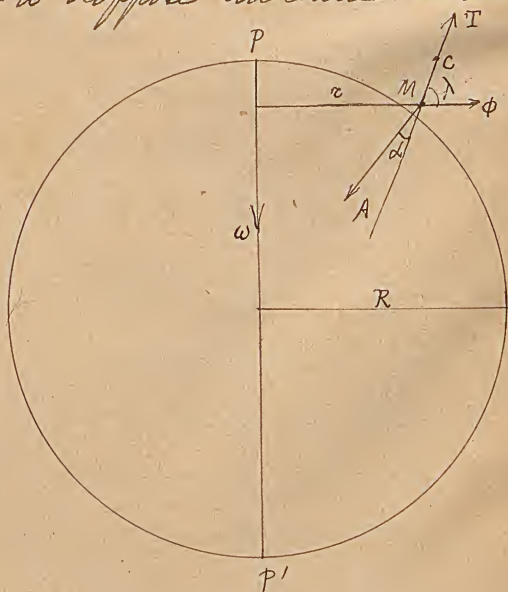
La force centrifuge est donc:

$$\Phi = -m\omega^2 r$$

et elle est dirigée suivant le rayon à l'opposé du centre. La terre étant supposée fine, les 3 forces  $T, A, \Phi$  se font équilibre.

Écrivons que chacune d'elles est proportionnelle au sinus des 2 autres. L'angle  $CM\Phi$  est la latitude  $\lambda$  du lieu = appelons  $\alpha$  l'angle de  $MA$  avec la verticale  $CM$  prolongée; c'est ce qu'on nomme déviation de la verticale. On a donc:

$$\frac{mg}{\sin(\lambda - \alpha)} = \frac{m\omega^2 r}{\sin \alpha} = \frac{A}{\sin \lambda}$$





75

Telles sont les 2 équations de l'équilibre: elles donnent  $A$  et  $\alpha$  en fonction des quantités connues  $m, g, \omega, r, \lambda$ , données par l'observation.

On écrit d'abord:  $A \sin \alpha = m \omega^2 r \sin \lambda$

Ecrivons que la somme des 3 projections sur la verticale  $MC$  est nulle:

$$A \cos \alpha = mg + m \omega^2 r \cos \lambda$$

Ces 2 équations permettent de calculer  $A$  et  $\tan \alpha$ .

On peut écrire la seconde:  $mg = A \cos \alpha - m \omega^2 r \cos \lambda$

C'est la formule du poids en chaque lieu de la surface de la terre.

À l'équateur, on a  $\lambda = 0$ , donc  $\alpha = 0$ .

L'écartement du pendule est nulle; on a:  $mg_0 = A_0 - m \omega^2 R$

$R$  étant le rayon terrestre équatorial; on peut écrire:

$$mg_0 = A_0 \left(1 - \frac{m \omega^2 R}{A_0}\right)$$

Tel est le poids d'un corps à l'équateur, en fraction de l'attraction.

On trouve que:  $\frac{m \omega^2 R}{A_0} = \frac{1}{289}$

$$mg_0 = \frac{288}{289} A_0$$

L'intensité de la pesanteur est donc, à l'équateur, les  $\frac{288}{289}$

de l'attraction terrestre. On peut se rappeler cette formule

en remarquant que si la terre tournait 17 fois plus vite, la pesanteur serait nulle à l'équateur:  $17^2 = 289$   $\frac{m(17\omega)^2 R}{A_0} = 1$ .

Au pôle, on a  $\lambda = 0$ ,  $\alpha = 0$ ; donc:  $mg = A$

La pesanteur est égale à l'attraction; tout se passe (dans l'équilibre) comme si la terre ne tournait pas.

Pour étudier la variation de la pesanteur et de l'écartement du pendule



avec la latitude, nous supposons la terre sphérique et composée de couches concentriques homogènes, de sorte que l'attraction soit partout la même et dirigée vers le centre; alors:  $OM = R$ .

$$r = R \cos(\lambda - \alpha) \quad A \sin \alpha = m \omega^2 R \sin \lambda \cos(\lambda - \alpha)$$

$\alpha$  étant très-petit, on peut négliger les termes du 2<sup>e</sup> ordre en  $\alpha$ , c.à.d. réduire  $\cos \alpha$  à 1, et  $\sin \alpha$  à  $\alpha$ . En négligeant aussi  $\omega^2 \alpha$ , on peut réduire  $\cos(\lambda - \alpha)$  à  $\cos \lambda$ .

Grâce à ces approximations, on trouve:

$$\alpha = \frac{m \omega^2 R}{A} \sin \lambda \cos \lambda = \frac{\sin \lambda \cos \lambda}{289} = \frac{\sin 2\lambda}{2 \cdot 289}$$

Cette formule montre immédiatement que la déviation de la verticale a son maximum à la latitude de  $45^\circ$ ;  $\lambda = \frac{\pi}{4}$  et qu'elle s'annule à l'équateur et au pôle.

On trouve, avec la même approximation:

$$mg = A - m \omega^2 R \cos^2 \lambda = A \left( 1 - \frac{\cos^2 \lambda}{289} \right)$$

Cette formule donne la diminution du poids due à la rotation:

$$\frac{\cos^2 \lambda}{289} \quad \text{On voit qu'elle est } \frac{1}{289} \text{ à l'équateur, 0 au pôle.}$$

— Equations du mouvement relatif d'un p. à la surface de la terre.  
Soit un lieu O, de latitude  $\lambda$ , à la surface de la terre; menons par ce point un système d'axes mobiles invariablement liés à la terre: prenons pour Oz la verticale vers le bas, pour Oy la tangente au parallèle vers l'Est, pour Ox la tangente au méridien



vers le Sud. Soit  $M$  un point mobile dans ce système, situé à la surface de la terre, et par conséquent très-voisin de  $O$ . Il est soumis à l'attraction  $A$ , et à d'autres forces directement appliquées qui ont pour résultante  $F(XYZ)$ . Pour avoir les équations du mouvement relatif, on regarde les axes  $Oxyz$  comme fixes en appliquant au point  $M$  les forces fictives  $\Phi$  et  $\Phi'$ .

Or, on vient de voir que:  $(\Phi) + (A) = mg$

Les équations du mouvement seront donc:

$$m \frac{dy}{dx} = Y - m J_y$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = Z + mg - m J_{cx}$$

La force centrifuge ( $-m J_E$ ) est ainsi englobée dans le poids (dans les projections sont 0, 0,  $mg$ ) force fictive, mais comme

$q = 0$ . Remarquons que  $x \tilde{\partial} \omega = \lambda$   
car  $c$  est la hauteur du pôle au-dessus de l'horizon. On a donc:



$$p = \omega \cos \lambda$$

$$q = 0$$

$$r = \omega \sin \lambda$$

$$T_{cx} = 2 \left( q \frac{dx}{dt} - r \frac{dy}{dt} \right) = -2\omega \sin \lambda \frac{dy}{dt}$$

$$T_{cy} = 2 \left( r \frac{dx}{dt} - p \frac{dy}{dt} \right) = 2\omega \left( \sin \lambda \frac{dx}{dt} - \cos \lambda \frac{dy}{dt} \right)$$

$$T_{cz} = 2 \left( p \frac{dz}{dt} - q \frac{dx}{dt} \right) = 2\omega \cos \lambda \frac{dz}{dt}$$

On portera ces expressions dans les équations du mouvement relatif.

On peut appliquer le théorème des forces vives: on sait que  $T_c$  disparaît dans cette combinaison, comme il serait aisé de le vérifier par le calcul.

Il reste: 
$$\frac{d \frac{mv^2}{2}}{dt} = Xdx + Ydy + Zdz + mgdz$$

Si  $q$  a une fonction de forces,  $V(x, y, z)$  on a immédiatement l'intégrale des forces vives: 
$$\frac{mv^2}{2} = V + gx + h$$

Cette intégrale première a la même forme que si la terre était immobile. Relativement à ce que  $\Phi'$  (force centrifuge composée) disparaît, c'est que  $\Phi$  (force centrifuge) est comprise dans le poids.

Applications. Chute libre d'un point pesant sans vitesse initiale. Dans ce cas particulier,  $F(X, Y, Z)$  est nul, et l'on a les équations: (le corps est abandonné au p. 0.)

$$\frac{dx}{dt^2} = 2\omega \sin \lambda \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt^2} = -2\omega \left( \sin \lambda \frac{dx}{dt} - \cos \lambda \frac{dz}{dt} \right)$$

$$\frac{dz}{dt^2} = g - 2\omega \cos \lambda \frac{dy}{dt}$$

On peut appliquer le théorème des forces vives, qui fait disparaître la force centrifuge composée: 
$$\frac{d \frac{mv^2}{2}}{dt} = g dz \quad v^2 = 2gx + h$$

On a la même intégrale des forces vives que dans l'hypothèse où la



79

terre serait fixe. - Intégrons la 1<sup>e</sup> équation du mouvement:

$$\frac{dx}{dt} = 2\omega y \sin \lambda \quad \text{Constante nulle car } y_0 = 0 \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = 0$$

Intégrons la 2<sup>e</sup>;  $\frac{dz}{dt} = gt - 2\omega y \cos \lambda$

Constante nulle, parce que:  $y_0 = 0 \quad \left(\frac{dz}{dt}\right)_0 = 0$ .

Portons ces expressions de  $\frac{dx}{dt}$ ,  $\frac{dz}{dt}$  dans la 3<sup>e</sup> équation; elle ne contiendra plus que  $y$ :

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -2\omega [2\omega y - gt \cos \lambda] \quad \frac{d^2y}{dt^2} + 4\omega^2 y = 2\omega g t \cos \lambda$$

On a une équation linéaire à coefficients constants avec second membre, qu'on peut intégrer par la méthode ordinaire. Mais comme  $\omega$  est très-petit, on peut procéder par approximation, en considérant  $\omega$  comme un infiniment petit du 1<sup>er</sup> ordre; on négligera donc  $\omega^2$ :

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 2\omega g t \cos \lambda$$

Intégrons;  $\frac{dy}{dt} = \omega g t^2 \cos \lambda$

$$y = \omega g \cos \lambda \cdot \frac{t^3}{3}$$

Constante nulle, car pour  $t=0$ ,  $\frac{dy}{dt} = 0$ ,  $y = 0$ .

On voit que  $y$  est un infiniment petit de l'ordre de  $\omega$ .

Portons sa valeur dans l'expression de  $\frac{dx}{dt}$ :

$$\frac{dx}{dt} = 2\omega \sin \lambda \cdot \omega g \cos \lambda \cdot \frac{t^3}{3} = 2\omega^2 g \sin \lambda \cos \lambda \frac{t^3}{3}$$

Puisque nous négligeons  $\omega^2$ , la valeur de  $\frac{dx}{dt}$  serait 0, au degré d'approximation choisi. On aurait  $x = C t^0 = 0$ , car  $x=0$  à l'origine du mouvement.

En portant la valeur de  $y$  dans l'expression de  $\frac{dz}{dt}$ , on aurait:



$$\frac{dx}{dt} = gt$$

$$x = \frac{gt^2}{2}$$

au même degré d'approximation; d'où:

Constante nulle, car  $\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = 0$ ,  $x_0 = 0$ .

On a donc les formules suivantes, vrais aux infiniment petits du 2<sup>e</sup> ordre près:  $x = 0$   $y = \omega g \cos \lambda \frac{t^3}{3}$   $z = \frac{gt^2}{2}$

L'expression de  $y$  seule diffère de celle qui correspond à la chute absolue. — Si l'on avait calculé les valeurs exactes de  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , et qu'on les eût développées suivant les puissances croissantes de  $\omega$ , les termes finis ou du 1<sup>er</sup> degré en  $\omega$  seraient ceux qui figurent dans les formules précédentes. Si l'on prenait les termes en  $\omega^2$  pour avoir une approximation supérieure,  $x$  prendrait une valeur positive extrêmement petite, inaccessible à l'expérience.

Comme  $y$  varie avec  $t$  et est de l'ordre de  $\omega$ , le point ne tombe pas verticalement, mais est légèrement dévié vers l'Est. Il est facile de voir qu'il décrit une parabole semi-cubique, dont l'équation est:

$$y = \frac{\omega g \cos \lambda}{3} \left( \frac{2z}{g} \right)^{\frac{3}{2}}$$

Cette déviation a pu être constatée aux mines de Freiberg en Silecie. Dans un puits vertical de 158 mètres de hauteur, la déviation du corps vers l'E. a été de  $0^m, 0283$ . La déviation, calculée par les formules précédentes, est  $0^m, 0276$ . L'écart de ces 2 nombres est insignifiant et de l'ordre des erreurs d'expérience.

— Mouvement d'un point sur un plan horizontal à la surface de la terre.

Prenons le plan  $Oxy$  pour ce plan horizontal. Les forces qui agissent



sur le corps sont ~~son poids~~  $mg$  et la réaction du plan, supposé normal  
(pas de frottement). Donc:  $X=0$ ,  $Y=0$ ,  $Z=-N$ .

Les équations du mouvement relatif dans le plan des  $xy$  sont:

$$\frac{dx}{dt^2} = 2\omega \sin \lambda \frac{dy}{dt} \quad \frac{dy}{dt^2} = -2\omega \left[ \sin \lambda \frac{dx}{dt} - \cos \lambda \frac{dz}{dt} \right]$$

Où  $\frac{dz}{dt} = 0$ , puisque le point se meut dans le plan  $Oxy$  —  $\frac{dz}{dt^2} = 0$ .

La 3<sup>e</sup> équation donne la réaction normale, soit en même temps nul:

$$0 = mg - N - 2m\omega \cos \lambda \frac{dy}{dt}$$

d'où:  $N = -mg - 2m\omega \cos \lambda \frac{dy}{dt}$

On voit que la réaction normale n'est pas rigoureusement égale (et contraire) au poids, comme cela aurait lieu si la terre était fixe; elle est plus grande ou moins grande que le poids suivant le signe de  $\frac{dy}{dt}$ , c'est-à-dire suivant que le point mobile avance vers l'O. ou vers l'Est. — L'intégrale des forces vives montre que la vitesse du mobile est constante, parce que l'accélération de Coriolis disparaît:

$$d \frac{v^2}{2} = 0 \quad v = C^{te}$$

Pour obtenir la trajectoire, intégrons les 2 équations du mouvement:

$$\frac{dx}{dt} = 2\omega y \sin \lambda + a$$

$a$  = vitesse initiale suivant  $Ox$   $\left( \frac{dx}{dt} \right)_0$

$$\frac{dy}{dt} = -2\omega x \sin \lambda + b$$

$b$  = vit. init. suivant  $Oy$   $\left( \frac{dy}{dt} \right)_0$

Formons une combinaison intégrable de ces 2 équations:

$$2\omega \sin \lambda (x dx + y dy) + a dy - b dx = 0$$

d'où:

$$\omega \sin \lambda (x^2 + y^2) + ay - bx = 0$$

Constante nulle, car pour  $t=0$ ,  $x=0$ ,  $y=0$ .



La trajectoire est un cercle passant par l'origine et de rayon très grand. L'ordonnée du centre est:  $\frac{-a}{2\omega \sin \lambda}$  Son abscisse:  $\frac{b}{2\omega \sin \lambda}$

Il ne faut pas oublier que les formules ne s'appliquent qu dans la mesure où le plan horizontal se confond avec la surface terrestre, c à d dans le voisinage immédiat du point O.

— Pendule de Foucault. Soit un pendule sphérique attaché en O, de longueur  $\ell$ , formé par un point pesant M; on demande le mouvement relatif de ce point, en tenant compte de la rotation de la terre.

Le point M est sollicité par son poids et par la réaction normale de la sphère (tension du fil) N, qui a pour projections sur les axes

$-N \frac{x}{\ell}$ ,  $-N \frac{y}{\ell}$ ,  $-N \frac{z}{\ell}$ , puis qu'il est dirigé suivant le rayon (et vers le centre O). Les équations du mouvement relatif seront donc:

$$m \frac{dx}{dt} = -N \frac{x}{\ell} + 2m\omega \sin \lambda \frac{dy}{dt}$$

$$m \frac{dy}{dt} = -N \frac{y}{\ell} - 2m\omega \left( \sin \lambda \frac{dx}{dt} - \cos \lambda \frac{dz}{dt} \right)$$

$$m \frac{dz}{dt} = -N \frac{z}{\ell} + mg - 2m\omega \cos \lambda \frac{dy}{dt}$$

Joignons-y l'équation de la surface:  $x^2 + y^2 + z^2 - \ell^2 = 0$ .

On ne peut intégrer ces équations qu par approximation. On peut remarquer que, en vertu de l'équilibre des forces vives, la vitesse du point a la même formule qu si la terre était immobile:

$$d \frac{mv^2}{2} = mg dz \quad v^2 = 2gx + b = 2gx + v_0^2 - 2gx_0$$

Si le pendule s'écarte très peu de la verticale Oz, x, y seront très-petits; on pourra les assimiler à des infiniment petits d'ordre 1<sup>er</sup>, et on négligera leurs carrés. z sera alors égal à  $\ell$ , à des infiniment



petits près d'ordre supérieur au 1<sup>er</sup>.  $z = l \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{l^2}}$   $z = l$ .

$\delta$  sera infiniment petite comme  $\delta_0$ , puisque  $z = z_0$ . Donc  $\frac{dx}{dt}$ ,  $\frac{dy}{dt}$  seront infiniment petits du 1<sup>er</sup> ordre. Quant à  $\frac{dz}{dt}$ , elle sera nulle, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur. La dernière équation donne alors, avec ces approximations:

$$0 = -N + mg - 2mw \cos \lambda \frac{dy}{dt}$$

d'où:  $N = mg - 2mw \cos \lambda \frac{dy}{dt}$

Nous venons de voir que c'est la formule rigoureuse pour un plan horizontal. Elle ne s'applique à la sphère qu'autant qu'elle se confond avec son plan tangent. — Le produit  $w \frac{dy}{dt}$  peut être négligé, tant du 2<sup>e</sup> ordre; on a donc, au degré d'approximation choisi:  $N = mg$  Posons:  $w' = w \sin \lambda$ .

$$\frac{dx}{dt^2} = -\frac{g}{l} x + 2w' \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt^2} = -\frac{g}{l} y - 2w' \frac{dx}{dt}$$

Ces équations définissent le mouvement du point M dans le plan tangent confondu avec la sphère. Ce sont 2 équations linéaires à coefficients constants que l'on pourrait intégrer exactement. Mais on peut en former 2 combinaisons aisément intégrables = d'abord, l'équation des forces vives:

$$d\frac{v^2}{2} = -\frac{g}{l} (x dx + y dy)$$

$$v^2 = -\frac{g}{l} r^2 + h$$

en posant:  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  rayon vecteur dans le plan Oxy — Puis la combinaison des moments:

$$x \frac{dy}{dt^2} - y \frac{dx}{dt^2} = -2w' \left( x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} \right)$$

qui donne, en intégrant:



$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = -\omega' r^2 + C \quad \text{ou:} \quad r^2 \frac{d\theta}{dt} = -\omega' r^2 + C$$

en coordonnées polaires;  $C$  est un infiniment petit du 2<sup>e</sup> ordre, comme  $r^2$ . On a donc, en coordonnées polaires, les 2 équations:

$$\frac{dr^2 + r^2 d\theta^2}{dt^2} = -\frac{g}{L} r^2 + h \quad r^2 \left( \frac{d\theta}{dt} + \omega' \right) = C.$$

On peut les interpréter immédiatement dans un cas particulier simple. Supposons que le pendule étant en équilibre relatif, c'est-à-d. coïncidant avec la verticale, on lui donne une petite impulsion. On a alors:

$$C = 0 \quad \text{donc:} \quad \frac{d\theta}{dt} + \omega' = 0 \quad \text{car} \quad r^2 \neq 0.$$

$$\text{En intégrant:} \quad \theta = -\omega' t + \theta_0.$$

Cette équation montre que dans le plan horizontal, l'angle polaire  $\theta$  varie proportionnellement au temps, c'est-à-d. que le plan d'oscillation  $zOM$  tourne uniformément autour de  $Oz$  avec la vitesse angulaire  $-\omega'$ ; il fait un tour entier en:  $\frac{2\pi}{\omega'} = \frac{2\pi}{\omega \sin \lambda} = \frac{24^h}{\sin \lambda}$

En fait, le phénomène est presque évident: nous savons que le pendule simple ~~reste~~ oscille dans un plan fixe; comme le point d'attache est fixe, le plan d'oscillation reste fixe pendant que la terre tourne au-dessous du pendule; donc ce plan semble faire un tour en 24 heures en sens inverse de la rotation de la terre. La formule précédente montre qu'en un point quelconque de la terre, tout se passe comme si le point  $O$  était fixe, la terre tournait autour de la verticale du lieu ( $Oz$ ) avec une vitesse angulaire  $\omega \sin \lambda$ .

— Revenons au cas général. La 2<sup>e</sup> équation du mouvement du point dans le plan  $Oxy$  est analogue à l'équation bien connue des arcs. Pour la ramener à cette forme, posons:

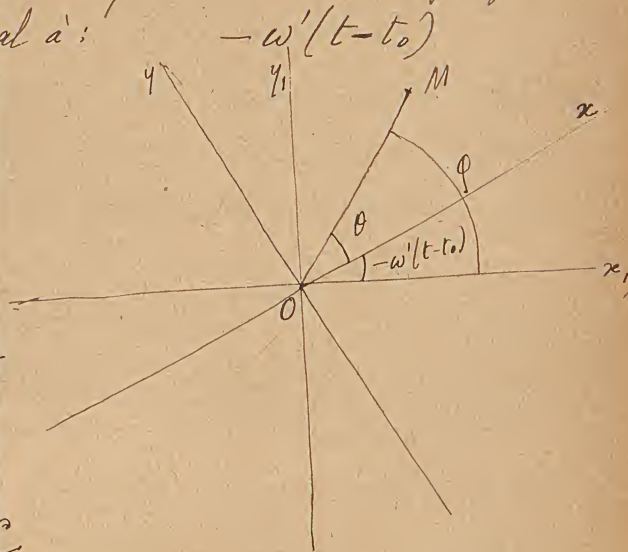


$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\theta}{dt} + \omega' \quad \text{donc:} \quad \varphi = \theta + \omega'(t-t_0)$$

Menons dans le plan horizontal un système d'axes  $Ox, y$ , faisant avec les axes  $Ox', y'$  un angle égal à :

$$-\omega'(t-t_0)$$

L'angle  $MOx$ , sera alors égal à  $\varphi$  : c'est l'angle polaire du p.  $M$  dans le système mobile, qui tourne (par rapport au système  $Ox, y$  supposé fixe) autour de  $O$  avec la vitesse angulaire constante  $-\omega'$ . On voit que dans le système mobile  $Ox', y'$ , le mouvement obéit à la loi des aires :  $r^2 \frac{d\varphi}{dt} = C$



L'autre équation se simplifie également :

$$\frac{dr^2}{dt^2} + r^2 \left( \frac{d\varphi}{dt} - \omega' \right)^2 = -\frac{g}{l} r^2 + h$$

Or le produit (rectangle) :  $-2\omega' r^2 \frac{d\varphi}{dt}$  est constant, en vertu de la loi des aires; on a donc  $h'$  étant une nouvelle constante :

$$\frac{dr^2}{dt^2} + r^2 \frac{d\varphi^2}{dt^2} = -\frac{g}{l} r^2 + h'$$

(on rentre aussi :  $r^2 \omega'^2$ )

Cette équation est celle du mouvement d'un point attiré par le centre  $O$  proportionnellement à la distance, dans le plan  $Ox, y$  : en effet, si l'on étudie la force centrale :  $-m \frac{g}{l} r$ , on trouve les 2 équations précédentes, dont l'une exprime la loi des aires, l'autre traduit le théorème des forces vives. On sait



que la trajectoire d'un point soumis à cette force est une ellipse ayant  $O$  pour centre, et fixe dans le plan  $Ox, y_z$  - La durée d'une révolution est:  $T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$ .

L'autre part, l'ellipse tourne autour de  $O$ , dans le système fixe  $Ox, y_z$ , avec la vitesse angulaire  $-\omega'$ . Dans le cas particulier que nous venons de traiter, cette ellipse se réduisait à une ligne droite, parce que:  $C=0$ ,  $\varphi = C^{\frac{1}{2}}$  - Ainsi la rotation de latitude produit une rotation apparente de l'ellipse autour de la verticale du lieu; elle fait un tour dans la période:  $T = \frac{2\pi}{\omega'} = \frac{24^h}{\sin \lambda}$ .

Cette période est de 32 heures environ à Paris.

Dans l'expérience de Foucault, le pendule, écarté de la verticale et maintenant immobile, avait été abandonné sans vitesse initiale.

On a dans ce cas:  $\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = 0$   $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_0 = 0$

La position initiale est un sommet de l'ellipse; car la 1<sup>re</sup> formule montre que la tangente à l'ellipse est perpendiculaire au rayon vecteur initial: donc:  $OA = \epsilon_0 = a$  demi-axe de l'ellipse.

On peut déterminer  $C$  par les conditions initiales; on a en général:

$$L^2 \left( \frac{d\theta}{dt} + \omega' \right) = C \quad \text{donc:} \quad C = a^2 \omega'$$

Cette est la constante des aires engendrées par le sp. M dans le plan mobile  $Ox, y_z$ . On peut tirer de cette formule le rapport des axes; en effet,  $C = \frac{2\pi ab}{T_1}$  d'où:  $2\pi ab = a^2 \omega' T_1$

$$\frac{b}{a} = \frac{T_1 \omega'}{2\pi} = \frac{T_1}{T}$$

Dans l'expérience du Panthéon, on avait:  $T_1 = 16$  secondes



Par conséquent:  $\frac{b}{a} = \frac{16}{32.60^2} = \frac{1}{7200}$

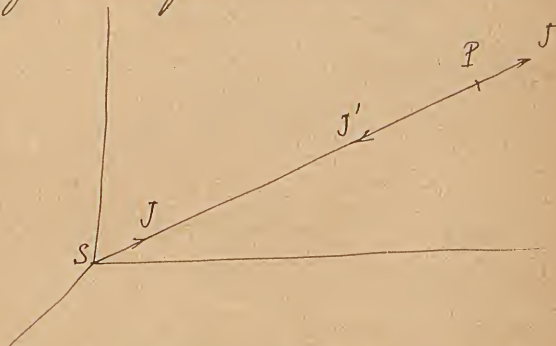
On voit que le petit axe de l'ellipse est imperceptible; le pendule passe très près de la verticale.

— Remarque générale. Si le système d'axes mobiles est animé d'un mouvement de translation par rapport au système fixe, la force centrifuge composée est nulle, puisqu'alors:  $\omega = 0$ .

Le théorème du mouvement relatif se simplifie dans ce cas: il suffit de tenir compte de la force centrifuge:  $\Phi = -mJ_E$ .

Application: Mouvement relatif d'une planète autour du soleil.

Menons par le centre S du soleil des axes de directions fixes: le système de comparaison sera animé d'un mouvement de translation. Cherchons le mouvement relatif de la planète P dans ce système. On a:



$F = F' = \frac{fMm}{r^2}$  pour l'attraction réciproque de S et de P,  $f$  étant l'attraction d'unité de masse à l'unité de distance;  $M, m$  les masses du soleil et de la planète. L'accélération du soleil sera:  $J = \frac{F}{M} = \frac{fm}{r^2}$  dirigée vers P.

L'accélération de la planète sera:  $J' = \frac{F'}{m} = \frac{fM}{r^2}$

dirigée vers S. On peut regarder les axes comme fixes, en ajoutant à P la force centrifuge. Or l'accélération d'entraînement de P est l'accélération de S, puisque les axes éprouvent une translation.



La force centrifuge est donc  $mT$  appliquée en  $P$  et dirigée en sens contraire, c'est-à-dire vers  $S$ ;

$$Q = mT = \frac{f m^2}{r^2}.$$

Les axes étant supposés fixes, la planète sera soumise aux 2 forces  $f \frac{Mm}{r^2}$  et  $f \frac{m^2}{r^2}$  dirigées toutes deux vers  $S$ ; elles s'ajoutent, et le point  $P$  se meut dans le système de coordonnées commun s'il était soumis à la seule force centrale :

$$f \frac{Mm}{r^2} + f \frac{m^2}{r^2} = f \frac{(M+m)m}{r^2}$$

On retrouve ainsi le résultat connu. La planète se meut par rapport au soleil comme si le soleil était fixe, sa masse étant augmentée de celle de la planète, l'attraction ayant lieu suivant la loi de Newton.



# Dynamique des Systèmes.

## Moments d'inertie.

On a vu, en statique, le rôle important que jouent les quantités de la forme:  $\sum mx$   $\sum my$   $\sum mx^2$  qui figurent dans les équations du centre de gravité d'un système.

On considère, dans la dynamique des systèmes, des sommes analogues, du second degré en  $x, y, z$ :

$$\sum mx^2, \sum my^2, \sum mz^2, \sum mxy, \sum mzx, \sum mny.$$

Ces quantités, dont on fait constamment usage, ont reçu des noms que nous allons définir, et jouissent de propriétés importantes que nous allons démontrer.

On appelle moment d'inertie d'un système par rapport à un plan, à un axe ou à un point, la somme des produits formés en multipliant la masse de chacun de ses points par la distance au plan, à l'axe ou au point:  $\sum md^2$ .

En mécanique, on n'a à considérer que les moments d'inertie par rapport à des axes, mais on a souvent à les transformer en moments d'inertie par rapport à des plans ou à des points; cela se fait au moyen des équivalences que nous allons établir.

Soit un système d'axes rectangulaires:  $Oxyz$  et un système matériel donné. Son moment d'inertie par rapport au plan des  $xy$  sera évidemment:  $\sum mz^2$ .



90  
De même, les moments d'inertie par rapport aux plans  $Oyz$ ,  $Oxz$  sont :

$$\sum m x^2$$

$$\sum m y^2$$

Son moment d'inertie par rapport à l'axe  $Oz$  est (les distances se projetant en vraie grandeur sur  $Oxy$ ) :

$$\sum m(x^2 + y^2)$$

De même, les moments d'inertie par rapport aux axes  $Ox$ ,  $Oy$  sont :

$$\sum m(y^2 + z^2)$$

$$\sum m(z^2 + x^2)$$

Enfin son moment d'inertie par rapport à l'origine est (puisque  $OM^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ) :

$$\sum m(x^2 + y^2 + z^2)$$

On en conclut immédiatement les théorèmes suivants :

Le moment d'inertie d'un système par rapport à un axe est égal à la somme de ses moments d'inertie par rapport à 2 plans rectangulaires passant par cet axe.

Le moment d'inertie par rapport à un point est égal à la somme des moments d'inertie par rapport à 3 plans orthogonaux passant par ce point, ou à la somme des moments d'inertie par rapport à un plan & à un axe perpendiculaire passant par ce point, ou à la demi-somme des moments d'inertie par rapport à 3 axes rectangulaires passant par ce point.

Soit  $A$  le moment d'inertie par rapport à l'axe  $Ox$ ,  $B$  celui par rapport à  $Oy$ ,  $C$  celui par rapport à  $Oz$ . Chacun d'eux est plus petit que la somme des 2 autres ; en effet :

$$\sum m(y^2 + z^2) < \sum m(x^2 + y^2) + \sum m(z^2 + x^2) = \sum m(y^2 + z^2 + 2x^2)$$

Ces 3 nombres  $A$ ,  $B$ ,  $C$  vérifient donc les inégalités :

$$A < B + C$$

$$B < C + A$$

$$C < A + B$$

cà d. qu'avec 3 droites ayant pour longueurs  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , on peut construire



un triangle. — Seul y a description que dans le cas particulier où le système est entièrement situé dans le plan des  $yz$ ; on a alors:

$$\sum m x^2 = 0, \quad \text{d'où:} \quad A = B + C$$

Les sommes:  $\sum m y z$ ,  $\sum m x z$ ,  $\sum m x y$  se ramènent aisément à des moments d'inertie. Considérons le plan bissecteur  $P$  du dièdre  $Oxz$ , et le plan  $P'$  bissecteur du dièdre complémentaire; leurs équations sont:

$$x - y = 0$$

$$x + y = 0$$

Soyent  $\delta, \delta'$  les distances d'un pt.  $M$  à ces 2 plans  $P, P'$ :

$$\delta = \pm \frac{x - y}{\sqrt{2}}$$

$$\delta' = \pm \frac{x + y}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Or: } xy = \frac{1}{4} [(x+y)^2 - (x-y)^2] \quad \sum mxy = \frac{1}{2} [\sum m \delta'^2 - \sum m \delta^2]$$

Ainsi cette somme est égale à la demi-différence des moments d'inertie par rapport aux 2 plans  $P, P'$  bissecteurs des dièdres des 2 plans:  $xOz, yOz$ .

Quand le système matériel est un corps continu, les moments d'inertie se calculent par des intégrales triples étendues au volume de ce corps. Nous allons évaluer les moments d'inertie des corps les plus simples et les plus usuels.

— Moment et inertie d'un cylindre de révolution homogène par rapport à son axe.

Soit  $r$  le rayon du base,  $h$  la hauteur,  $\rho$  la densité, constante. Calculons l'accroissement infiniment petit  $dI$  du moment d'inertie correspondant à un accroissement infiniment petit du rayon.



Le volume du cylindre est:  $\pi r^2 h$  et la masse:  $M = \pi r^2 h \rho$ .

Si  $r$  croît de  $dr$ , on a:  $dM = 2\pi r h \rho dr$

C'est la masse de la couche cylindrique dont le solide s'est accru; d'où on le moment d'inertie de cette couche par rapport à l'axe. Or tous ses points sont à la distance  $r$  de l'axe; on a donc:

$$d\mu = dM \cdot r^2 = 2\pi r^3 h \rho dr \quad \text{Intégrons:}$$

$$\mu = \pi h \rho \frac{r^4}{2} \quad \text{Constante nulle, car pour } r=0, \mu=0.$$

Exprimons  $\mu$  en fonction de  $M$ :  $\mu = \frac{M r^2}{2}$

Il y a intérêt, pour l'homogénéité des formules, à mettre le moment d'inertie sous la forme  $M K^2$ ,  $M$  étant la masse totale du système ( $\Sigma m$ ) et  $K$  une longueur. On trouve ici:  $K = \frac{r}{\sqrt{2}}$ .

Cette longueur s'appelle rayon de giration du système autour de l'axe considéré: c'est la distance à laquelle faudrait placer un point matériel de masse  $M$  pour que son moment d'inertie fut égal à celui du système proposé.

Le moment d'inertie d'un solide de révolution homogène par rapport à son axe se déduit aisément de celui du cylindre.

Soit l'équation de la surface de révolution:  $x = \phi(r)$  et considérons le volume limité par cette surface et les 2 plans parallèles:  $x = x_0, x = x_1$ . Soit  $\rho$  la densité, constante.

On décompose le volume en tranches infiniment minces dans le sens de la hauteur; chaque tranche peut être assimilée à un cylindre; son moment d'inertie est donc:  $\frac{\pi \rho}{2} r^4 dx$   $dx$  étant la hauteur. Le moment d'inertie du volume total est

Rayon de giration d'une barre (2l) autour de son milieu:  $K = \frac{l}{\sqrt{3}}$ .



l'intégrale:  $\frac{\pi \rho}{2} \int_{z_0}^z z^4 dz$   $z$  fonction de  $z$ .

Exemples: Moment d'inertie d'une sphère par rapport à un diamètre.

L'équation de la surface est:

$$z^2 + z^2 = R^2$$

Le moment d'inertie est:

$$\frac{\pi \rho}{2} \int_{-R}^{+R} (R^2 - z^2)^2 dz$$

Intégrale indéfinie:

$$\frac{\pi \rho}{2} \left[ R^4 z - 2R^2 \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} \right]$$

Intégrale prise de  $-R$  à  $+R$  (le centre étant pris pour origine):

$$\pi \rho R^5 \left[ 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \right] = \frac{8}{15} \pi \rho R^5 \quad \text{Exprimons } \mu \text{ par } M:$$

$$M = \frac{4}{3} \pi \rho R^3 \quad \mu = M \frac{2}{5} R^2 \quad K = R \sqrt{\frac{2}{5}}$$

Le moment d'inertie de la sphère par rapport à un plan diamétral est la moitié de  $\mu$ , c'est-à-dire:

$$\frac{4}{15} \pi \rho R^5 = M \frac{R^2}{5}$$

- Moment d'inertie d'un ellipsoïde homogène.

Soit l'équation de l'ellipsoïde:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

Son moment d'inertie par rapport au plan des  $xy$  est:  $\sum m x^2$

La masse de chaque élément de volume étant  $\rho dx dy dz$ ,

$$\mu = \iiint \rho x^2 dx dy dz$$

intégrale triple étendue à tous les points de l'ellipsoïde, c'est-à-dire à tous les systèmes  $(x, y, z)$  qui vérifient l'inégalité:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \leq 0$ .

Ramenons l'ellipsoïde à une sphère par le changement de variables:

$$x = ax'$$

$$y = by'$$

$$z = cz'$$



L'intégrale devient :

$$\mu = abc^3 \rho \iiint x'^2 dx' dy' dz'$$

les nouvelles variables étant prises dans les limites définies par l'inégalité :

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - 1 < 0$$

ce d. que l'intégrale est étendue au volume de la sphère de rayon 1.

On sait que son moment d'inertie par rapport au plan des  $x'y'$  est :

$$\frac{4}{15} \pi \rho$$

Le moment d'inertie de l'ellipsoïde par rap-

port au plan des  $xy$  est donc :

$$\frac{4}{15} \pi \rho abc^3$$

Où :  $M = \frac{4}{3} \pi \rho abc$

Donc :  $\mu = M \frac{c^2}{5}$

On trouverait de même que les moments d'inertie par rapport aux plans des  $yz$  et des  $xz$  sont :

$$M \frac{a^2}{5}, \quad M \frac{b^2}{5}$$

Les moments d'inertie par rapport aux 3 axes  $Ox, Oy, Oz$  sont :

$$M \frac{b^2 + c^2}{5}$$

$$M \frac{c^2 + a^2}{5}$$

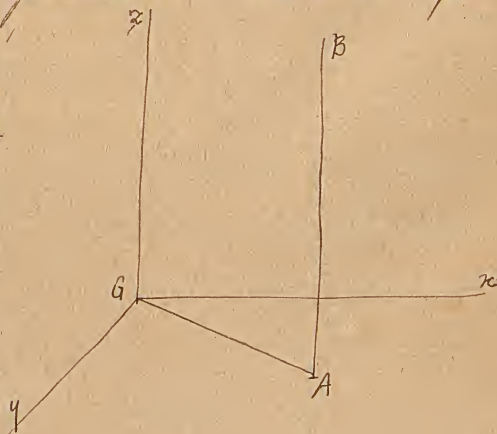
$$M \frac{a^2 + b^2}{5}$$

Enfin le moment d'inertie par rapport à l'origine  $O$  est :

$$M \frac{a^2 + b^2 + c^2}{5}$$

- Nous allons maintenant étudier la variation du moment d'inertie d'un système par rapport à des axes parallèles. - Cette étude repose sur le théorème suivant :

Le moment d'inertie d'un système par rapport à un axe quelconque est égal au moment d'inertie par rapport au centre de gravité du système, plus le produit de la masse totale par le carré de la distance des 2 axes.





Soit AB l'axe considéré; menons par le centre de gravité l'axe  $Gz$  parallèle à AB. Le moment d'inertie du système par rapport à AB est,  $\sum mr^2$ . Soient  $a, b$  les coordonnées de p. A au axe AB perpendiculaire du  $xy$ ;  $r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2$

$\sum mr^2 = \sum m[(x-a)^2 + (y-b)^2] = \sum m(x^2 + y^2) + \sum m(a^2 + b^2) + 2\sum m(ax + by)$   
Le dernier terme est nul, car les axes  $Ox, Oy$  passent par G; on a  $\sum mx = 0$   $\sum my = 0$ . D'autre part

$\sum m(a^2 + b^2) = (a^2 + b^2) \sum m = M(a^2 + b^2)$  Il reste donc:

$\sum mr^2 = \sum m(x^2 + y^2) + M(a^2 + b^2)$  c. q. f. d.

Il en résulte que si l'on déplace l'axe AB parallèlement à lui-même, le moment d'inertie a une partie constante,  $\sum m(x^2 + y^2)$  et une partie qui varie proportionnellement au carré de AG. L'axe pour lequel le moment d'inertie est minimum (parmi tous les axes parallèles) est donc  $Gz$ . Le lieu des axes pour lesquels le moment d'inertie a une valeur constante (supérieure à  $\sum m(x^2 + y^2)$ ) est un cylindre de révolution d'axe  $Gz$ .

— Cherchons maintenant la variation du moment d'inertie d'un système par rapport à des axes passant par un même point fixe.

Soit l'axe  $OA$  passant par l'origine, & défini par ses 3 cosinus directeurs  $\alpha, \beta, \gamma$ . Soit  $M(x, y, z)$  un point du système,  $MP = z$  sa distance à  $OA$ . Le moment d'inertie du système est  $\sum mr^2$ ;

calculons donc  $MP$ . Or:  $OP = \alpha x + \beta y + \gamma z$

$z^2 = OM^2 - OP^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2$

$z^2 = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2$



$$r^2 = \alpha^2(y^2 + z^2) + \beta^2(x^2 + z^2) + \gamma^2(x^2 + y^2) - 2\beta\gamma yz - 2\gamma\alpha zx - 2\alpha\beta xy$$

$$\sum mr^2 = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 - 2D\beta\gamma - 2E\gamma\alpha - 2F\alpha\beta$$

en posant:  $A = \sum m(y^2 + z^2)$  moment d'inertie par rapport à Ox,

et de même:  $B = \sum m(x^2 + z^2)$   $C = \sum m(x^2 + y^2)$

$$D = \sum m yz$$

$$E = \sum m xz$$

$$F = \sum m xy$$

Le moment d'inertie dépend donc des 3 cosinus directeurs de l'axe variable, et des 6 constantes A B C D E F, qu'on calculera, dans le cas d'un corps continu, au moyen d'intégrales triples.

Pour étudier la variation de ce moment d'inertie, on le transforme pour le ramener à une expression dont la discussion soit connue.

Portons sur OA une longueur:

Les coordonnées du point I sont:

$$x = \alpha \overline{OI}$$

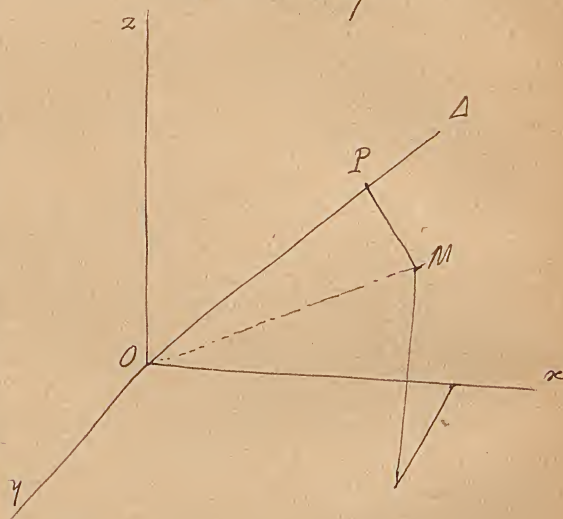
$$y = \beta \overline{OI}$$

$$z = \gamma \overline{OI}$$

$$\sum mr^2 = \frac{1}{\overline{OI}^2} = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 - 2D\beta\gamma - 2E\gamma\alpha - 2F\alpha\beta$$

d'où:  $1 = Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 2Dyz - 2Exz - 2Fxy$

c'est l'équation d'une surface du 2<sup>e</sup> ordre ayant l'origine pour centre; or  $\overline{OI}$  ne peut devenir infini, en général; donc le lieu du point I est un ellipsoïde ayant pour centre O: on l'appelle ellipsoïde d'inertie relatif au point O.



$$\overline{OI} = \frac{1}{\sqrt{\sum mr^2}}$$



OI ne devient infini que si  $\sum mr^2 = 0$ ,  
càd si tous les points du système se trouvaient sur un certain  
axe OA ; le point I serait à l'infini dans cette unique direction,  
son lieu serait donc un cylindre elliptique.

Le moment d'inertie par rapport à un axe quelconque issu de  
O varie donc en raison inverse du carré du rayon vecteur inter-  
cepté sur cet axe par l'ellipsoïde d'inertie:  $\frac{1}{OI^2}$ .

Le plus petit moment d'inertie correspond au grand axe, le plus  
grand au petit axe. Le lieu des axes par rapport auxquels le  
moment d'inertie a la même valeur est le lieu du diamètre  
d'égale longueur de l'ellipsoïde; c'est un cône du 2<sup>e</sup> degré.

Les 3 axes de l'ellipsoïde sont dits axes principaux d'inertie, et  
les moments d'inertie par rapport à ces axes sont les moments  
d'inertie principaux. Les 3 plans principaux de l'ellipsoïde  
sont appelés plans principaux d'inertie.

En chaque point de l'espace il y a, pour un système donné, 3  
axes principaux et 3 plans principaux d'inertie. Il y a une  
infinité de plans principaux autour d'un des axes si l'ellipsoïde  
est de révolution; il y a une infinité d'axes et de plans principaux  
si l'ellipsoïde est une sphère.

Pour que l'axe Oz soit un axe principal d'inertie relatif au p. O,  
il faut que le plan Oxy soit un plan principal d'inertie, càd. un  
plan de symétrie pour l'ellipsoïde; z ne doit donc pas figurer au  
1<sup>er</sup> degré dans l'équation, ce qui exige  $D = 0, E = 0$ ,  
càd:  $\sum m x z = 0$   $\sum m y z = 0$ .



En général, l'axe  $Ox$  ne sera axe principal qu'relativement au seul point  $O$ . Supposons qu'il le soit aussi pour un autre point  $O'$  ( $x=h$ ). Menons par  $O'$  des axes  $O'x'y'z'$  parallèles aux premiers; on doit avoir:

$$\sum m x' z' = 0 \qquad \sum m y' z' = 0$$

Où:  $x' = x$        $y' = y$        $z' = z - h$       Donc:

$$\sum m x (z - h) = 0 \qquad \sum m y (z - h) = 0 \qquad \text{ce qui revient à:}$$

$$h \sum m x = 0 \qquad h \sum m y = 0$$

Ces nouvelles conditions expriment que le centre de gravité du système se trouve sur  $Ox$ . Comme elles sont remplies quel que soit  $h$ , l'axe  $Ox$  sera un axe principal pour tous les points, et en particulier pour le centre de gravité. Donc les axes principaux relatifs au centre de gravité sont les seuls qui soient axes principaux pour tous les points.

L'étude de la distribution des axes et plans principaux de inertie dans l'espace est liée à la théorie des surfaces homofocales du 2<sup>e</sup> degré.

Prends pour origine le centre de gravité  $G$ ; on aura:

$$\sum m x = 0 \qquad \sum m y = 0 \qquad \sum m z = 0$$

et pour axes les axes principaux relatifs au point  $G$ ; on aura:

$$\sum m y z = 0 \qquad \sum m x z = 0 \qquad \sum m x y = 0$$

Posons:  $\sum m x^2 = Ma^2$        $\sum m y^2 = Mb^2$        $\sum m z^2 = Mc^2$

ce sont les 3 moments d'inertie principaux ( $M$  = masse totale.)

Cherchons l'enveloppe des plans par rapport auxquels le moment d'inertie a une valeur constante donnée  $Mk^2$ . L'équation du plan variable sera:

$$ux + vy + wz + 1 = 0$$



La distance d'un point  $(x, y, z)$  du système à ce plan est;

$$\delta = \frac{ux + vy + wz + 1}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}$$

On aura:  $\sum m \delta^2 = Mk^2$

ou:  $\sum m(ux + vy + wz + 1)^2 = Mk^2(u^2 + v^2 + w^2)$

ou:  $M(a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2 + 1) = Mk^2(u^2 + v^2 + w^2)$

(Les doubles produits disparaissent du 1<sup>er</sup> membre, grâce aux hypothèses)

$$u^2(a^2 - k^2) + v^2(b^2 - k^2) + w^2(c^2 - k^2) + 1 = 0$$

C'est l'équation de condition qui lie les coefficients du plan mobile, c'est l'équation tangentielle de son enveloppe; elle devient, en coordonnées cartésiennes:

$$\frac{x^2}{a^2 - k^2} + \frac{y^2}{b^2 - k^2} + \frac{z^2}{c^2 - k^2} + 1 = 0 \quad (1)$$

Elle représente une surface du 2<sup>e</sup> ordre; elle est réelle que si l'un des dénominateurs du moins est négatif; en supposant:

$a^2 > b^2 > c^2$ , il faut qu'on ait:  $k^2 > c^2$ .

Le minimum du moment d'inertie est donc  $Mc^2$  —

On aura un ellipsoïde pour enveloppe du plan si  $k^2 > a^2$ ; un hyperboloïde à 1 nappes si  $k^2 > b^2$ ; un hyperboloïde à 2 nappes si  $k^2 > c^2$ . — On sait que lorsque  $k^2$  varie de  $c^2$  à  $\infty$ , on a toutes les surfaces homofocales (de centre G.)

Théorème. Les 3 plans principaux d'inertie en un point O de l'espace sont les plans tangents aux 3 surfaces homofocales qui passent en O.

— Cherchons, parmi les plans passant par O, ceux pour lesquels le moment d'inertie a une valeur dominée  $Mk^2$ . Ces plans



auront pour enveloppe le cône circonscrit à la surface du tétraèdre (de centre  $G$ ) qui correspond à cette valeur, et ayant pour sommet  $O$ .

Cette enveloppe sera en général une véritable cône, et le plan sera indéterminé; mais elle se réduit à un plan double quand la surface passe par le point  $O$ , et ce plan double est tangent à cette surface en  $O$ .

Ainsi l'enveloppe des plans pour lesquels le moment d'inertie est  $Mk^2$  se réduit à un plan quand  $k^2$  est une des 3 racines de l'équation (1) considérée comme équation en  $k^2$ , et ces 3 plans sont respectivement tangents en  $O$  aux 3 surfaces homofocales qui passent par  $O$  et correspondent à ces 3 racines.

D'autre part, prenons pour axes ( $x'y'z'$ ) les 3 axes principaux d'inertie relatifs au point  $O$ , et posons:

$$\sum m x'^2 = M \alpha^2$$

$$\sum m y'^2 = M \beta^2 \quad \sum m z'^2 = M \gamma^2$$

Ces sont les moments d'inertie par rapport aux 3 plans principaux en  $O$ .

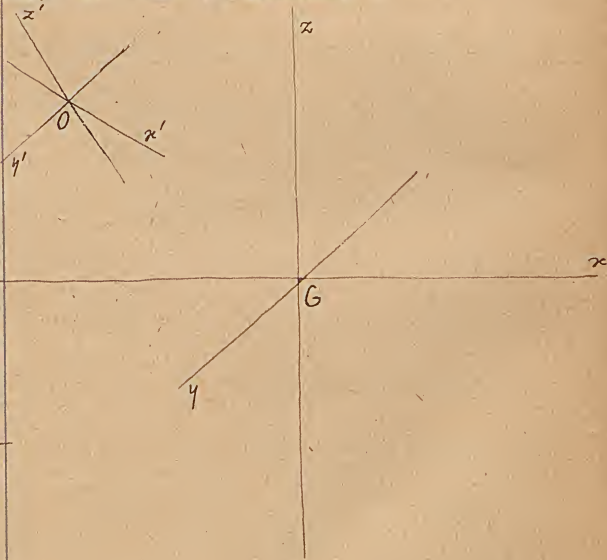
Cherchons directement l'enveloppe de tous les plans passant par  $O$  et pour lesquels le moment d'inertie a une valeur donnée  $Mk^2$ :

l'équation du plan mobile est:

$$ux' + vy' + wz' = 0$$

$$\text{On doit avoir: } \sum m \frac{(ux' + vy' + wz')^2}{u^2 + v^2 + w^2} = Mk^2 \quad \text{divisé par les deux membres}$$

$$M(\alpha^2 u^2 + \beta^2 v^2 + \gamma^2 w^2) = Mk^2(u^2 + v^2 + w^2) \quad \text{les termes rectangulaires sont nuls, les axes étant les axes principaux d'inertie par rapport à } O.$$





$$u^2(\alpha^2 - k^2) + v^2(\beta^2 - k^2) + w^2(\gamma^2 - k^2) = 0$$

Cette est l'équation tangentielle de l'enveloppe du plan; en coordonnées cartésiennes:

$$\frac{x'^2}{\alpha^2 - k^2} + \frac{y'^2}{\beta^2 - k^2} + \frac{z'^2}{\gamma^2 - k^2} = 0$$

Cette équation représente un véritable cône, sauf dans les cas où:

$$k^2 = \alpha^2, \quad k^2 = \beta^2, \quad k^2 = \gamma^2$$

L'enveloppe du plan se réduit alors à un des 3 plans principaux relatifs au point O. - Rapprochons ce résultat du précédent: on en conclut que les valeurs  $\alpha^2$ ,  $\beta^2$ ,  $\gamma^2$  sont les racines de l'équation (1) en  $k^2$ , et que les plans doubles tangents en O aux 3 surfaces homofocales qui correspondent à ces racines sont précisément les plans principaux d'inertie relatifs au point O.

Les moments d'inertie par rapport à ces 3 plans principaux sont  $M\alpha^2$ ,  $M\beta^2$ ,  $M\gamma^2$ , et  $\alpha^2\beta^2\gamma^2$  étant les racines de l'équation (1) en  $k^2$ . - On a ainsi une image très simple de la répartition des axes et des plans principaux d'inertie dans l'espace.





## Théorèmes généraux de la dynamique.

Pour avoir les équations du mouvement d'un système matériel, on écrit les équations du mouvement de chacun de ses points en y faisant figurer les forces auxquelles il est soumis, et on élimine toutes ces équations.

Il y a lieu de distinguer, en dynamique comme en statique, les forces intérieures et les forces extérieures au système.

Considérons un point  $(x, y, z)$  du système, de masse  $m$ ; on appelle forces intérieures appliquées au point les actions exercées sur lui par les autres points du système; forces extérieures toutes les autres. Soient  $X_i, Y_i, Z_i$  les projections d'une force intérieure,  $X_e, Y_e, Z_e$  celles d'une force extérieure; les équations du mouvement du point  $m$  seront:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = \sum X_i + \sum X_e \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = \sum Y_i + \sum Y_e \quad m \frac{d^2z}{dt^2} = \sum Z_i + \sum Z_e$$

On aura des équations analogues pour tous les points du système. Ajoutons toutes les équations relatives à l'axe des  $x$ :

$$\sum m \frac{d^2x}{dt^2} = \sum \sum X_i + \sum \sum X_e$$

Dans cette combinaison, les forces intérieures disparaissent du 2<sup>e</sup> membre, en effet, en vertu du principe de l'égalité de l'action et de la réaction, les forces intérieures sont deux à deux égales et directement opposées. D'autre part le 1<sup>er</sup> membre peut se mettre sous la forme d'une dérivée; on a donc l'équation:

$$\frac{d}{dt} \sum m \frac{dx}{dt} = \sum \sum X_e$$

où  $\sum m \frac{dx}{dt}$  est la somme des projections des quantités de mouvement des divers points du système sur l'axe des  $x$ . D'où ce théorème:

La dérivée par rapport au temps de la somme des projections des quantités de mouvement sur un axe est égale à la somme des  
(du système)



projections des forces extérieures sur cet axe.

Cette théorie peut s'écrire sous une autre forme, qui est plus usitée.

Soient:  $\xi, \eta, \zeta$  les coordonnées du centre de gravité du système à un instant donné; soit  $M$  la masse totale du système:  $M = \sum m_i$ ; on sait qu'on a la relation:

$$M \xi = \sum m x$$

d'où:  $M \frac{d\xi}{dt} = \sum m \frac{dx}{dt}$

$$M \frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{d}{dt} \sum m \frac{dx}{dt} = \sum m \frac{d^2x}{dt^2}$$

Les équations obtenues en sommant les équations du mouvement peuvent donc s'écrire:

$$M \frac{d^2\xi}{dt^2} = \sum \sum X_e$$

$$M \frac{d^2\eta}{dt^2} = \sum \sum Y_e$$

$$M \frac{d^2\zeta}{dt^2} = \sum \sum Z_e$$

Ces sont les équations du mouvement du point  $(\xi, \eta, \zeta)$ , de masse  $M$ , soumis aux forces qui figurent dans les 2<sup>es</sup> membres; on en conclut:

Théorème du mouvement du centre de gravité: Le centre de gravité d'un système se meut comme un point matériel libre ayant une masse égale à la masse totale du système, et sollicité par des forces égales et parallèles aux forces extérieures.

Les équations précédentes peuvent remplacer 3 équations du mouvement; mais elles ne peuvent pas en général s'intégrer indépendamment des autres équations, à moins que leurs 2<sup>es</sup> membres ne dépendent que de  $\xi, \eta, \zeta$ , auquel cas on a un système de 3 équations à 3 inconnues, comme pour un point matériel libre.

Quand ce système a une forme connue qu'on sait intégrer, le théorème précédent permet de trouver immédiatement le mouvement du centre de gravité du système.

- Exemples: Mouvement dans le vide d'un système pesant, déformable ou non.



Le centre de gravité se meut comme un point matériel ~~libre~~ <sup>libre</sup> ayant pour masse la masse totale du système, et soumis au poids total:  $Mg$ , c'est-à-dire soumis à la pesanteur en raison de sa masse. Il se meut donc comme un point matériel pesant entièrement libre, et décrit une parabole d'axe vertical.

Par exemple, le centre de gravité d'un projectile qui fait explosion suit une trajectoire parabolique quel qu'il soit le mouvement des fragments, parce que les forces qui ont produit l'explosion sont intérieures au système.

Mouvement d'un système de points attirés par un centre fixe proportionnellement aux masses et aux distances.

Soit le centre fixe  $O$  attirant les points  $M, M_2, \dots$  suivant cette loi: Soient  $F_1, F_2, \dots$  les forces attractions dirigées vers  $O$ :

$$F_1 = f m_1 OM_1$$

$$F_2 = f m_2 OM_2 \quad \dots \dots \dots$$

Les forces intérieures peuvent être quelconques. Le centre de gravité se meut comme un point matériel libre sollicité par toutes ces forces extérieures, ou par leur résultante. Or on a vu statiquement<sup>(1)</sup> que la résultante des attractions exercées sur un point  $O$  par un système de points  $M, M_2, \dots$  est égale à l'attraction qu'exercerait sur ce même point le centre de gravité  $G$  du système <sup>suivant la même loi</sup> —  <sup>$G$  ayant la masse totale</sup>

Comme les attractions exercées par le centre  $O$  sur les points  $M, M_2, \dots$  sont égales et contraires aux précédentes, on peut dire, inversement, que leur résultante est l'attraction qu'exercerait le centre  $O$  sur le point  $G$  ou serait concentrée la masse totale du système. Cette résultante est donc égale à:

$$R = f \cdot M \cdot GO$$

et dirigée vers  $O$  (la résultante précédente étant:  $f \cdot M \cdot OG$ .)

Le centre de gravité se meut donc comme un point matériel libre

(1) 1<sup>er</sup> cahier, page 76.



de masse  $M$  attire par le centre fixe  $O$  proportionnellement à la distance. On sait qu'il décrit une ellipse ayant  $O$  pour centre.

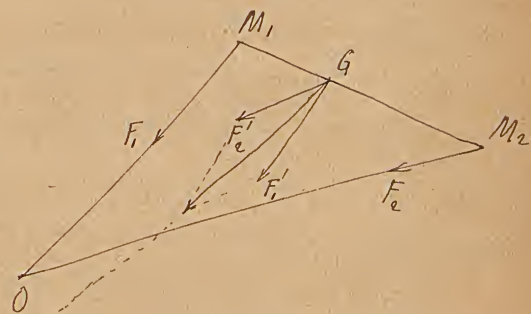
Cet exemple comprend le précédent comme cas particulier: il suffit de supposer le pt  $O$  à l'infini; les attractions deviennent parallèles et proportionnelles aux masses.

On voit par ces exemples que le théorème du mouvement du centre de gravité fournit de nombreuses applications des résultats de la dynamique du point matériel, qui semblait n'être qu'une abstraction.

Nous avons dit qu'en général on ne peut connaître séparément le mouvement du centre de gravité; en voici un exemple simple:

Soit un système de 2 points  $M_1, M_2$  qui s'attirent et sont attirés par un centre fixe  $O$  en raison inverse du carré de la distance.

Le centre de gravité  $G$  du système (sur la droite  $M_1 M_2$ ) se meut comme un point matériel sollicité par 2 forces égales et parallèles aux attractions  $F_1, F_2$ . Mais leur résultante dépend des coordonnées des 2 points, et les équations du mouvement du centre de gravité contiendront:  $\sum m_i$  et  $x_i, y_i, z_i$



par exemple. Il faudra donc joindre à ces 3 équations les 3 équations du mouvement du point  $M_1$ ; on aura à résoudre un système de 6 équations comme celui des équations des 2 pt  $M_1, M_2$ , auquel il est d'ailleurs équivalent.

Revenons aux équations du mouvement de chaque point du système:

$$m \frac{dx}{dt^2} = \sum X_i + \sum X_e \quad m \frac{dy}{dt^2} = \sum Y_i + \sum Y_e \quad m \frac{dz}{dt^2} = \sum Z_i + \sum Z_e$$



Effectuons sur des la combinaison des moments :

$$m \left( x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} \right) = \sum (x Y_i - y X_i) + \sum (x Y_e - y X_e)$$

ou :

$$\frac{d}{dt} \left[ m \left( x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) \right] = \sum (x Y_i - y X_i) + \sum (x Y_e - y X_e)$$

Faisons la même combinaison pour tous les points du système, et ajoutons :

$$\frac{d}{dt} \sum m \left( x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = \sum \sum (x Y_i - y X_i) + \sum \sum (x Y_e - y X_e)$$

Or les forces intérieures étant deux à deux égales et directement opposées, leurs moments sont deux à deux égaux et de signes contraire, donc leur somme est nulle ; il reste :

$$\frac{d}{dt} \sum m \left( x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = \sum \sum (x Y_e - y X_e) \quad \text{d'où :}$$

Théorème des moments des quantités de mouvement : La dérivée par rapport au temps de la somme des moments des quantités de mouvement d'un système par rapport à un axe est égale à la somme des moments des forces extérieures par rapport au même axe.

Si la somme des moments des forces extérieures par rapport à un axe est nulle, on a immédiatement un intégral première du mouvement.

S'il n'y a pas de forces extérieures, le centre de gravité, en vertu du 1<sup>er</sup> théorème, a un mouvement rectiligne et uniforme. On a d'autre part, par rapport à chaque axe, une relation de la forme :

$$\sum m \left( x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = C$$

qui exprime que le mouvement projeté sur le plan des  $xy$  s'effectue suivant la loi des aires. — Pour formuler cette loi pour un système de points, considérons l'aire  $A$  engendrée par la projection d'un point :

on a :

$$dA = \frac{1}{2} (x dy - y dx) \quad \text{D'où :} \quad \sum m \frac{dA}{dt} = \frac{C}{2}$$

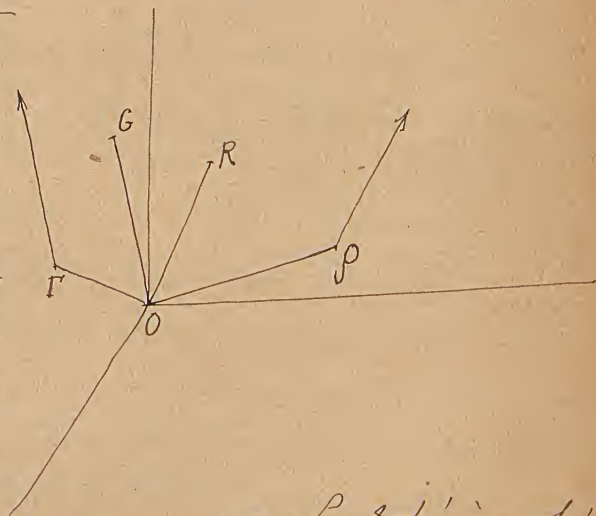


Intégrons:  $\sum m A = \frac{C}{2} t + C'$  ce qui signifie:  
 La somme des aires décrites par les projections des divers points, respectivement multipliées par la masse du point correspondant, est proportionnelle au temps -  $C$  est égal au double de la somme précédente pendant l'unité de temps - On peut annuler  $C'$  en comptant les aires à partir de l'instant initial ( $t=0$ .)

On peut appliquer ce théorème au système solaire, puisqu'aucune force extérieure n'agit sur lui (les actions des étoiles sont insensibles.) La projection du mouvement sur un plan quelconque obéit donc à la loi des aires, ou encore la rotation des divers corps du système autour d'un axe quelconque s'effectue suivant la loi des aires.

Les 2 théorèmes généraux que nous venons de démontrer peuvent s'interpréter géométriquement.

Soient 3 axes rectangulaires  $Oxyz$ .  
 Les forces extérieures appliquées au système constituent un système de vecteurs; soit  $OR$  la résultante générale,  $OG$  son moment résultant par rapport au point  $O$ . Les



quantités de mouvement forment un autre système de vecteurs (mou dans l'espace) soit  $Op$  la résultante générale,  $OT$  son moment résultant par rapport à  $O$ . Les 2 théorèmes précédents expriment une relation très simple entre ces 4 vecteurs.

En effet, les projections de  $OR$  sont:

$$\sum X_e, \sum Y_e, \sum Z_e$$

celles de  $Op$  sont:  $\alpha = \sum m \frac{dx}{dt}, \beta = \sum m \frac{dy}{dt}, \gamma = \sum m \frac{dz}{dt}$



L'équation relative aux projections des quantités de mouvement s'écrit :

$$\frac{d\alpha}{dt} = \sum \sum X_e \quad \frac{d\beta}{dt} = \sum \sum Y_e \quad \frac{d\gamma}{dt} = \sum \sum Z_e$$

ce qui signifie que la vitesse du point  $p$  dans l'espace est égale et parallèle à  $OR$ .

De même, les projections de  $OG$  sont :

$$\sum (x Y_e - y X_e) \quad \sum (y Z_e - z Y_e) \quad \sum (z X_e - x Z_e)$$

Celles de  $OI$  sont :

$$V = \sum m \left( x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) \quad \lambda = \sum m \left( y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right) \quad \mu = \sum m \left( z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} \right)$$

L'équation des moments des quantités de mouvement se traduit par :

$$\frac{dV}{dt} = \sum (x Y_e - y X_e) \quad \frac{d\lambda}{dt} = \sum (y Z_e - z Y_e) \quad \frac{d\mu}{dt} = \sum (z X_e - x Z_e)$$

ce qui montre que la vitesse du point  $I$  dans l'espace est égale et parallèle à  $OG$ .

Si il n'y a pas de forces extérieures, les vecteurs  $OR$ ,  $OG$  sont nuls, donc les vecteurs  $Op$ ,  $OI$  ont une position fixe dans l'espace.

L'équation des moments des quantités de mouvement s'applique aussi à des axes mobiles munis par le centre de gravité  $G$ .

Menons les axes  $Gx'y'z'$  parallèles aux axes fixes ; ils sont entraînés par le centre de gravité du système dans un mouvement de translation. Le mouvement relatif du système par rapport à ces axes mobiles est ce qu'on appelle le mouvement autour du centre de gravité ; quand on le connaît et qu'on connaît le mouvement du centre de gravité, on connaît complètement le mouvement absolu du système. Or on a dans les axes fixes, en vertu du th. des mom. des quant. de mouv.,



la relation:  $\frac{d}{dt} \sum m (x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt}) = \sum (x Y_c - y X_c)$

On va démontrer que la même équation est vraie dans les axes mobiles, et que par conséquent on n'a pas besoin, pour connaître le mouvement relatif du système dans les axes mobiles choisis, de faire intervenir la force centrifuge (la force centrifuge composée se trouve déjà éliminée par le fait que les axes mobiles éprouvent une simple translation.)

Partant de l'équation précédente, faisons le changement d'axes :

$$x = \xi + x' \quad y = \eta + y' \quad z = \zeta + z'$$

$\xi, \eta, \zeta$  étant les coordonnées absolues du centre de gravité. Le 1<sup>er</sup> membre devient:  $\sum m (x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt}) = \sum m [(x' + \xi) \frac{dy' + d\eta}{dt} - (y' + \eta) \frac{dx' + d\xi}{dt}]$

$$= \sum m (x' \frac{dy'}{dt} - y' \frac{dx'}{dt}) + \sum m (\xi \frac{d\eta}{dt} - \eta \frac{d\xi}{dt}) + \sum m (x' \frac{d\eta}{dt} - y' \frac{d\xi}{dt}) + \sum m (\xi \frac{dy'}{dt} - \eta \frac{dx'}{dt})$$

Or les 2 derniers termes s'annulent, parce que l'origine choisie est le centre de gravité; on a en effet:  $\sum m x' \frac{d\eta}{dt} = \frac{d\eta}{dt} \sum m x' = 0$

et de même:  $\sum m \xi \frac{dy'}{dt} = \xi \sum m \frac{dy'}{dt} = 0$  comme  $\sum m y' = 0$ .

La somme des moments des quantités de mouvement se réduit donc à:

$$\sum m (x' \frac{dy'}{dt} - y' \frac{dx'}{dt}) + M (\xi \frac{d\eta}{dt} - \eta \frac{d\xi}{dt}) \quad M = \sum m$$

d'où: Théorème: La somme des moments des quantités de mouvement d'un système par rapport à un axe fixe est égale à la somme des moments des quantités de mouvement par rapport à un axe mené par le centre de gravité du système parallèlement au 1<sup>er</sup>, augmentée du moment de la quantité de mouvement de la masse totale, supposée concentrée au centre de gravité, par rapport à l'axe fixe.

(cf. théorème relatif aux moments d'inertie, pag. 94.)



Le 2<sup>e</sup> membre de l'équation devient:

$$\begin{aligned}\Sigma(x Y_e - y X_e) &= \Sigma[(x' + \xi) Y_e - (y' + \eta) X_e] \\ &= \Sigma(x' Y_e - y' X_e) + \Sigma(\xi Y_e - \eta X_e)\end{aligned}$$

On a donc:

$$\frac{d}{dt} \Sigma m(x' \frac{dy'}{dt} - y' \frac{dx'}{dt}) + M(\xi \frac{d\eta}{dt} - \eta \frac{d\xi}{dt}) = \Sigma(x' Y_e - y' X_e) + \Sigma(\xi Y_e - \eta X_e)$$

Or les derniers termes des 2 membres se détruisent, car on a, en vertu du théorème du mouvement du centre de gravité:

$$M \xi \frac{d\eta}{dt} = \Sigma \xi Y_e \quad \text{et} \quad M \eta \frac{d\xi}{dt} = \Sigma \eta X_e$$

Il reste:  $\frac{d}{dt} \Sigma m(x' \frac{dy'}{dt} - y' \frac{dx'}{dt}) = \Sigma(x' Y_e - y' X_e) \quad \text{c. q. f. d.}$

On a ainsi immédiatement 3 équations du mouvement relatif par rapport aux axes issus du centre de gravité, dépourvus de toute force fictive.

De cette formule on tire les mêmes conclusions que pour les axes fixes. Si la somme des moments des forces extérieures est nulle par rapport à un axe passant par le centre de gravité, on a par cette formule une intégrale première du mouvement; par exemple:

$$\Sigma m(x' \frac{dy'}{dt} - y' \frac{dx'}{dt}) = C$$

et cette équation recevra la même interprétation; elle exprime que la projection du mouvement sur le plan  $Gx'y'$  ~~se fait~~ obéit à la loi des aires.

On peut encore appliquer ce théorème au mouvement du système solaire. Si l'on mène par son centre de gravité des axes de direction fixe le mouvement s'effectuera autour de chacun d'eux suivant la loi des aires.



Suivante la démonstration géométrique de ce théorème est la même que ci-dessus.  
Remarquons que les projections des forces extérieures sont les mêmes sur les axes mobiles que sur les axes fixes, puisqu'ils sont parallèles. Soit  $GG'$  le moment résultant des forces extérieures par rapport à  $G$ , et  $GI'$  le moment résultant des quantités de mouvement relatives (produit de la vitesse relative par la masse). Le théorème exprime que la vitesse relative du point  $I'$  (dans le système mobile) est égale et parallèle au vecteur  $GG'$ .

S'il n'y a pas de forces extérieures,  $GG'$  est nul, donc le point  $I'$  reste fixe dans le système mobile; le vecteur  $GI'$  reste donc constant en grandeur et en direction.

Dans le système solaire en particulier, ou les forces extérieures sont nulles (ou absolument négligeables), le segment  $GI'$  reste constant. On peut calculer ses projections sur les 3 axes de direction fixe; ce sont les sommes des moments des quantités de mouvement par rapport aux 3 axes; on connaît par suite la direction, qui est constante.

Le plan perpendiculaire à  $GI'$  et passant par  $G$  reste toujours parallèle à lui-même: c'est le plan invariable de Laplace. C'est à ce plan qu'on rapporte les positions de l'équateur et de l'écliptique, et c'est par rapport à ce plan considéré comme fixe qu'on étudie le mouvement de ces plans.

On peut remarquer que le plan perpendiculaire au vecteur  $GI'$  est en général le plan du maximum des aires: en effet, pour avoir la valeur de la constante des aires pour un plan quelconque, il suffit de projeter le vecteur  $GI'$  sur la normale de ce plan. On voit donc que le maximum de la constante des aires a lieu pour le plan invariable.



perpendiculaire à  $I$ ,  $\left\{ C = \sum m \left( x' \frac{dy'}{dt} - y' \frac{dx'}{dt} \right) = V' \text{ proj. de } G\delta' \text{ sur } Gz' \right\}$   
 Poisson, dans sa Statique, a légèrement corrigé les calculs pour lesquels Laplace avait déterminé la position du plan invariable, en tenant compte des rotations des planètes sur elles-mêmes, que Laplace avait négligés.

Exemple: Considérons une barre rigide pesante lancée dans le vide. — On sait, par le théorème du mouvement du centre de gravité, que le centre de gravité  $G$  de cette barre décrit une parabole d'axe vertical. Menons les axes  $G\eta$  et  $Gz$  de directions fixes; les forces extérieures étant nuls par rapport à ces axes (puisque leur <sup>moments des</sup> résultante  $Mg$  est appliquée en  $G$ ) la loi des aires s'applique aux 3 plans, ce qui se traduit géométriquement par ce fait que le moment simultané  $GT$  est fixe dans les axes mobiles.

On va démontrer que la barre tourne avec une vitesse angulaire constante dans le plan invariable perpendiculaire à  $GT$ .

Soit  $A(x_0, y_0, z_0)$  une extrémité de la barre; posons:  $GA = l$

Considérons le point  $m$  de la barre à une distance  $r$  de  $G$ : ses coordonnées sont:

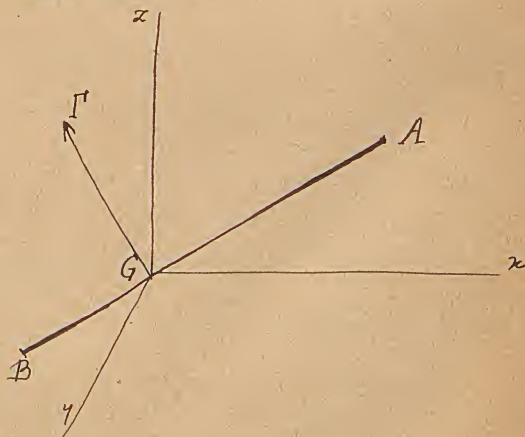
$$x = \frac{r}{l} x_0 \quad y = \frac{r}{l} y_0 \quad z = \frac{r}{l} z_0$$

Le moment de la quantité de mouvement par rapport à  $Gz$  est:

$$m \left( x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = m \frac{r^2}{l^2} \left( x_0 \frac{dy_0}{dt} - y_0 \frac{dx_0}{dt} \right)$$

La somme de ces moments pour tous les points de la barre est:

$$\frac{1}{l^2} \left( x_0 \frac{dy_0}{dt} - y_0 \frac{dx_0}{dt} \right) \sum m r^2$$



Or:  $\sum m r^2 = M k^2$



moment d'inertie de la barre par rapport à son centre de gravité  $G$ ;  
on a donc:

$$\frac{Mk^2}{I_2} \left( x_0 \frac{dy_0}{dt} - y_0 \frac{dx_0}{dt} \right) = C$$

équation qui exprime la loi des aires dans le plan  $Gxy$ . De même:

$$\frac{Mk^2}{I_2} \left( y_0 \frac{dz_0}{dt} - z_0 \frac{dy_0}{dt} \right) = A \quad \frac{Mk^2}{I_2} \left( z_0 \frac{dx_0}{dt} - x_0 \frac{dz_0}{dt} \right) = B$$

équations relatives aux 2 autres plans. On tire de ces 3 équations:

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 = 0$$

équation d'un plan fixe passant par l'origine  $G$ , dans lequel doit rester le point  $A$ , et par suite la barre entière. Le mouvement obéissant à la loi des aires, la barre tourne avec une vitesse angulaire constante. Les constantes  $A, B, C$  se déterminent par les conditions initiales: on voit que ce sont les moments du p.  
A par rapport aux 3 axes à l'instant initial (à des facteurs constants près.) Elles sont proportionnelles aux projections du vecteur  $GI$  sur les 3 axes; donc le plan dont elles sont les coefficients est le plan invariant, ou le plan du maximum des aires.

### Théorème des forces vives pour un système matériel.

Pour chaque point du système, on a les équations du mouvement:

$$m \frac{dx_i}{dt} = \sum X_i + \sum X_e \quad m \frac{dy_i}{dt} = \sum Y_i + \sum Y_e \quad m \frac{dz_i}{dt} = \sum Z_i + \sum Z_e$$

Effectuons sur elles la combinaison des forces vives; on trouve:

$$d \frac{mv^2}{2} = \sum (X_i dx + Y_i dy + Z_i dz) + \sum (X_e dx + Y_e dy + Z_e dz)$$

Écrivons les équations analogues pour tous les points du système:

$$d \sum \frac{mv^2}{2} = \sum \sum (X_i dx + Y_i dy + Z_i dz) + \sum \sum (X_e dx + Y_e dy + Z_e dz)$$



d'où il s'en suit du théorème:

La différentielle de la demi-force vive totale du système est égale à la somme des travaux élémentaires de toutes les forces du système.

Il faut remarquer que les forces intérieures ne disparaissent pas, comme dans les théorèmes relatifs aux quantités de mouvement. En effet, la somme de leurs travaux élémentaires n'est pas nulle en général; les forces intérieures exercées par 2 points l'un sur l'autre sont égales et directement opposées; soit  $F$  leur valeur commune, prise positivement si les 2 points se repoussent, négativement s'ils s'attirent; on appelle cette quantité leur action mutuelle; or on a vu, ci-dessus (2e cahier, page 35) que la somme des travaux des 2 forces, ou le travail de l'action mutuelle des 2 points, est égal à  $F dr$ ,  $dr$  étant la différentielle de leur distance. Ce travail n'est pas nul, à moins que les 2 points ne soient invariablement liés entre eux.

Donc la somme des travaux élémentaires des forces intérieures ne s'annule que lorsque le système est un corps solide. On a donc, pour les systèmes solides seulement, la relation suivante:

$$d \sum \frac{m v^2}{2} = \sum \sum (X_e dx + Y_e dy + Z_e dz)$$

où ne figurent que les forces extérieures au système.

Il y a un cas où la somme des travaux des forces intérieures est une différentielle totale exacte; c'est quand les actions mutuelles de 2 points sont fonctions de la distance seulement: on a en effet:

Quelconques.

$$F = \varphi(r) \quad F dr = d(\varphi(r) r)$$

Appelons  $U_i$  la somme des intégrales analogues; c'est la fonction des forces intérieures; on aura:

$$\sum \sum (X_i dx + Y_i dy + Z_i dz) = dU_i$$



La fonction  $-U_i$  s'appelle potentiel des forces intérieures ou énergie potentielle du système. Elle est déterminée qu'à une constante près, c'est-à-d. qu'on peut choisir arbitrairement sa valeur initiale. On la choisit en général assez grande pour que l'énergie potentielle soit positive dans toutes les configurations considérées du système. On peut remarquer que c'est une fonction purement géométrique, qui ne dépend que de la configuration du système. Dans ce cas, on les forces intérieures ne dépendent que des positions relatives des points, on peut écrire, en faisant passer  $dU_i$  dans le 1<sup>er</sup> membre:

$$d\left[\sum \frac{mv^2}{2} - U_i\right] = \sum \sum (X_e dx + Y_e dy + Z_e dz)$$

Le 1<sup>er</sup> membre est ce qu'on appelle la différentielle de l'énergie totale. L'énergie totale est la somme du potentiel et de la demi-force vive du système. Celle-ci est une fonction purement cinématique, qui ne dépend que des vitesses des divers points du système: on l'appelle énergie cinétique, ou actuelle. On en conclut:

Théorème. La différentielle de l'énergie totale est égale à la somme des travaux élémentaires des forces extérieures.

Si l'on intègre l'équation précédente, on a la formule finie:

$$\left(\sum \frac{mv^2}{2} - U_i\right) - \left(\sum \frac{mv_0^2}{2} - U_{i_0}\right) = \int_{t_0}^t \sum \sum (X_e dx + Y_e dy + Z_e dz)$$

d'où ce second théorème:

La variation de l'énergie totale pendant un temps fini est égale à la somme des travaux des forces extérieures pendant le même temps.

Ce principe joue un rôle important dans la théorie mécanique de la chaleur.



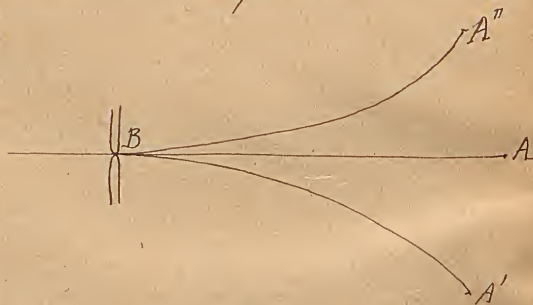
116  
Dans le cas particulier où le système n'est soumis à aucune force extérieure, son énergie totale reste constante (Principe de la conservation de l'énergie).

On peut donner une définition mécanique de l'énergie potentielle: le potentiel  $-V_i$  est égal à la somme des travaux élémentaires des forces intérieures quand on fait passer le système de la configuration actuelle à la configuration pour laquelle le potentiel s'annule. En effet, on a en général: 
$$U_{i_0} - V_i = \int \sum \sum (X_i dx + Y_i dy + Z_i dz)$$

Si l'on prend  $U_{i_0} = 0$ , on a la valeur de potentiel  $-V_i$ .

— Exemple: Considérons une lame AB parfaitement élastique, fixée à son extrémité B. Admettons que les forces intérieures ne dépendent que des distances relatives des deux points, c'est-à-dire qu'il y ait un potentiel. Dans la position d'équilibre AB, l'énergie cinétique est nulle, le système étant au repos; convenons de faire l'énergie potentielle nulle pour cette position; l'énergie totale sera nulle.

Mouvons la lame dans une nouvelle position BA', et maintenons-la au repos. L'énergie cinétique est nulle, mais l'énergie potentielle est égale au travail effectif pour l'amener en cette position, puisque ce travail est égal et contraire au travail des forces intérieures dans le déplacement AA'. L'énergie totale a donc une valeur positive égale à ce travail. Abandonnons la lame: les travaux des forces extérieures seront nuls (le p. B étant fixe par hypothèse) donc l'énergie totale





sera constante pendant le mouvement. La lame revient à sa position d'équilibre; mais quand elle arrive en BA, son énergie potentielle est nulle, donc son énergie cinétique s'est accrue et devient égale à l'énergie potentielle qu'elle avait en BA'. Elle dépasse donc BA et va jusqu'en BA'' symétrique de BA'; là elle s'arrête, parce que l'énergie potentielle reprend sa valeur initiale et que l'énergie cinétique s'annule. Les mêmes phénomènes se reproduisent alors en sens inverse, et la lame oscille indéfiniment autour de BA, en allant de A' à A'' avec une

— Exemple: Intégrale des forces vives dans le problème des 3 corps.

Soient  $m_1, m_2, m_3$  les masses des 3 points,  $r_1, r_2, r_3$  leurs distances. L'action mutuelle de  $m_1, m_2$  est:

$$-f \frac{m_1 m_2}{r_3^2}$$

L'action mutuelle de  $m_2, m_3$  est:

$$-f \frac{m_2 m_3}{r_1^2}$$

celle de  $m_3, m_1$  est:  $-f \frac{m_3 m_1}{r_2^2}$



Ces 3 actions mutuelles représentent les 6 forces intérieures du système.

La fonction des forces intérieures est:  $U_i = f \frac{m_1 m_2}{r_3} + f \frac{m_2 m_3}{r_1} + f \frac{m_3 m_1}{r_2}$

On donne aux 3 points des vitesses initiales quelconques, c'est-à-dire qu'on leur imprime une certaine énergie cinétique; comme, par hypothèse, aucune force extérieure n'agit sur eux, leur énergie totale est constante:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + \frac{m_3 v_3^2}{2} - \left( f \frac{m_1 m_2}{r_3} + f \frac{m_2 m_3}{r_1} + f \frac{m_3 m_1}{r_2} \right) = C^{\text{te}}$$

L'énergie potentielle s'annulerait si les distances des 3 points étaient infinies.



Elle est donc égale à la somme des travaux des forces intérieures si l'on éloignait les 3 points à l'infini à partir de leur position actuelle.

— Nous venons d'étudier des cas où il y a une fonction des forces intérieures; s'il y a aussi une fonction des forces extérieures, on dit simplement qu'il y a une fonction de forces :  $V(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n) = V_i + V_e$ . On a alors immédiatement l'intégrale première des forces vives.

$$d\sum \frac{mv^2}{2} = dV \quad \sum \frac{mv^2}{2} = V + h \quad (h = \sum \frac{mv_0^2}{2} - V_0)$$

— Pour l'application du théorème des forces vives (comme pour celle du principe des vitesses virtuelles) il est utile de distinguer les forces directement appliquées et les forces de liaison. Celles-ci ne sont pas complètement connues et déterminées; il y a donc intérêt à les éliminer.

Le théorème des forces vives, avons-nous vu, s'applique à toutes les forces qui agissent sur tous les points du système, donc aux forces de liaison comme aux forces directement appliquées. Mais on a démontré en statique (Le Cat, page 34) que pour tout déplacement compatible avec les liaisons, supposés indépendants du temps et sans frottement, la somme des travaux des forces de liaison est nulle, quel que soit l'état du système. Donc, dans ce cas, la différentielle de la demi-force vive est égale à la somme des travaux élémentaires des forces directement appliquées.

Comme le théorème des moments des quantités de mouvement (page 108) le théorème des forces vives s'applique au mouvement relatif du système autour du centre de gravité.

Menons par le centre de gravité  $G$  3 axes parallèles aux axes fixes;



Soient  $\xi, \eta, \zeta$  les coordonnées absolues de  $G$ ;  $V$  sa vitesse. Considérons un point de masse  $m$ ; soient  $x', y', z'$  ses coordonnées relatives,  $v$  sa vitesse absolue,  $v'$  sa vitesse relative. On sait qu'on a, dans l'espace:

$$(v) = (V) + (v')$$

$$V^2 = \left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2$$

$$v^2 = \sum \left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

$$v'^2 = \sum \left(\frac{dx'}{dt}\right)^2$$

Effectuons le changement de coordonnées:

$$x = \xi + x'$$

$$y = \eta + y'$$

$$z = \zeta + z'$$

$$v^2 = \left(\frac{d\xi}{dt} + \frac{dx'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt} + \frac{dy'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dt} + \frac{dz'}{dt}\right)^2$$

$$v^2 = V^2 + v'^2 + 2 \left( \frac{d\xi}{dt} \frac{dx'}{dt} + \frac{d\eta}{dt} \frac{dy'}{dt} + \frac{d\zeta}{dt} \frac{dz'}{dt} \right)$$

On doit calculer la force vive totale:

$$\sum m v^2$$

Où:  $\sum m V^2 = V^2 \sum m = M V^2$

$\sum m v'^2 =$  force vive relative.

Les termes rectangulaires disparaissent de la somme parce que l'origine est le centre de gravité:

$$\sum m \frac{d\xi}{dt} \frac{dx'}{dt} = \frac{d\xi}{dt} \sum m \frac{dx'}{dt} = 0$$

car:  $\sum m x' = 0$

et ainsi des autres - d'où:

Théorème:

$$\sum m v^2 = M V^2 + \sum m v'^2$$

La force vive totale d'un système est égale à la force vive du système dans son mouvement relatif autour de son centre de gravité, augmentée de la force vive qu'aurait la masse totale concentrée au centre de gravité.

Cette théorie est utile dans beaucoup de cas, car il est souvent plus aisé de calculer  $M V^2$  et  $\sum m v'^2$  que  $\sum m v^2$ .

D'autre part le 2<sup>e</sup> membre de l'équation des forces vives devient:

$$\sum [X_i (d\xi + dx') + Y_i (d\eta + dy') + Z_i (d\zeta + dz')] + \sum [X'_e (d\xi + dx') + Y'_e (d\eta + dy') + Z'_e (d\zeta + dz')]$$



ou:  $\sum \sum X_i d\xi + \sum \sum X_i dx' + \sum \sum X_e d\xi + \sum \sum X_e dx'.$

Où:  $\sum \sum X_i d\xi = d\xi \sum \sum X_i = 0$   $\sum \sum X_e d\xi = d \frac{MV^2}{2}$

en vertu du théorème des forces vives appliqué au mouvement du centre de gravité; il reste donc dans l'équation des forces vives:

$$d \sum \frac{MV^2}{2} = \sum \sum X_i dx' + \sum \sum X_e dx'$$

Formule qui exprime le théorème des forces vives appliqué au mouvement relatif au système par rapport à des axes de direction fixe passant par le centre de gravité.

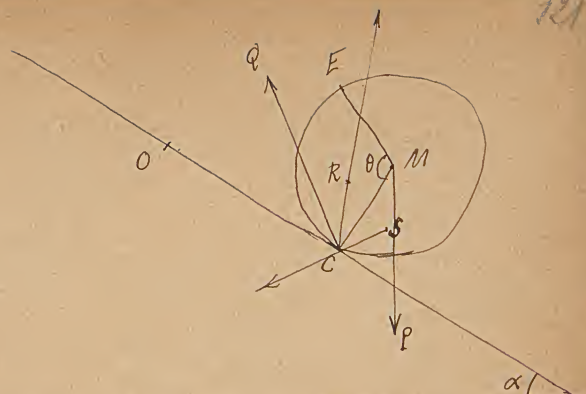
On pourrait retrouver ce théorème en appliquant le théorème du mouvement relatif, c'à d. en tenant compte de la force centrifuge (la force centrifuge composée est nulle, le mouvement d'entraînement étant une translation.) Toutes les forces fictives qu'on ferait intervenir seraient parallèles et proportionnelles aux masses des divers points; donc leur somme serait nulle, puisqu'il origine est le centre de gravité.

$(\sum m \frac{d^2 \xi}{dt^2} dx' = \frac{d^2 \xi}{dt^2} \sum m dx' = 0 \quad \text{Car: } \sum m x' = 0)$

Le théorème des forces vives est surtout utile pour les systèmes à liaisons complètes, quand ces liaisons sont indépendantes du temps. En effet, comme la configuration du système ne dépend que d'un paramètre, il suffit, pour connaître son mouvement, d'avoir une équation indépendante des liaisons. C'est le théorème des forces vives qui fournit cette équation, car nous venons de voir que dans ce cas les forces de liaison disparaissent.

Exemple. Mouvement d'un disque homogène <sup>sité</sup> posant dans un plan vertical, et roulant sans glisser sur une droite inclinée sur l'horizon.





La seule force directement appliquée est le poids total du disque  $Mg$  appliqué en son centre. Parmi les forces de liaison, celles qui relient entre eux les points du disque ont un travail nul, puisque le disque est supposé solide. Une autre force de liaison est la réaction de la droite fixe sur le disque mobile: c'est une force extérieure au système; mais son travail est aussi nul, la liaison consistant en un roulement (Deleury, page 37).

On pourrait retrouver directement cette proposition grâce à deux autres en statique. La réaction  $CR$  peut se décomposer en 2 forces appliquées en 2 points quelconques  $R, S$  fixes dans le disque mobile - or ~~la tangente~~ <sup>la perpendiculaire passant par C</sup> aux trajectoires de  $R$  et  $S$  est perpendiculaire au rayon vecteur  $CR, CS$ , puisque  $C$  est le centre instantané de rotation: donc le travail des 2 forces dans le déplacement du disque est constamment nul.

Prendre pour axe  $Ox$  la base, qui fait l'angle  $\alpha$  avec l'horizon. Soit  $E$  le point du disque qui a coïncidé avec  $O$ , à l'angle  $CME$  dont le disque a tourné depuis sa position initiale:  $EO = r = OC$

Elle est l'abaisse du centre  $M$ . - Appliquons le théorème des forces vives: la force vive de la masse totale concentrée au centre de gravité est:

$M \left( \frac{dx}{dt} \right)^2$  - Le mouvement relatif du disque est une rotation autour de son centre;  $M k^2$  étant le moment d'inertie par rapport au centre,

la force vive du disque dans cette rotation est:  $M k^2 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2$

Enfin le travail du poids  $Mg$  dans un déplacement infiniment petit  $dx$  est:  $Mg \sin \alpha \cdot dx$



129  
L'équation des forces vives est donc:

$$d\left[\frac{M}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{Mk^2}{2}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] = Mgsin\alpha dx$$

Où:  $\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{r} \frac{dx}{dt}$   $\frac{1}{2}d\left[\left(1 + \frac{k^2}{r^2}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right] = gsin\alpha dx$

$$\frac{dx}{dt} \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{gsin\alpha}{1 + \frac{k^2}{r^2}} \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{gsin\alpha}{1 + \frac{k^2}{r^2}}$$

L'accélération du centre est constante; le mouvement du centre est donc uniformément accéléré. La chute est plus lente que la chute libre pour 2 raisons; d'abord à cause de l'inclinaison de la base par rapport à la verticale; ensuite à cause de la rotation du disque, qui donne lieu au dénominateur  $1 + \frac{k^2}{r^2}$  ou figure le moment d'inertie.

Le mouvement de rotation du disque autour de son centre se trouve en même temps déterminé.

Nous avons invoqué ci-dessus une propriété qu'il est aisé de démontrer:

Lemme. Quand un corps solide tourne autour d'un axe, sa force vive est égale à son moment d'inertie multiplié par le carré de sa vitesse angulaire -

En effet la vitesse absolue de chacun de ses points est:

$$v = \omega r$$

$r$  étant la distance du point à l'axe.

La force vive totale est:  $\sum mv^2 = \sum m\omega^2 r^2 = \omega^2 \sum mr^2 = Mk^2 \omega^2$

On peut déterminer l'action CQ au moyen des équations du mouvement du centre de gravité:

$$M \frac{dx}{dt^2} = Mgsin\alpha + N_x$$

$$M \frac{dy}{dt^2} = Mgcos\alpha + N_y$$

On en tire:

$$N_x = \frac{-k^2}{r^2 + k^2} Mgsin\alpha$$

$$N_y = -Mgcos\alpha$$



L'action normale de la base:  $N_y$ , est la même qu'au repos, et égale à la composante normale du poids. L'action totale s'accroît donc, dans le mouvement, de sa composante tangentielle  $N_x$ , qui est constante.

Lemme. Quand un corps solide tourne autour d'un axe fixe, le moment de sa quantité de mouvement par rapport à cet axe est égal à son moment d'inertie multiplié par sa vitesse angulaire. Soit  $Ox$  l'axe de rotation, le moment de la quantité de mouvement est:

$$\sum m(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt}) = \sum mr^2 \frac{d\theta}{dt} = \sum mr^2 \omega = Mk^2 \omega$$

Nous allons maintenant étudier le mouvement d'un corps solide mobile autour d'un axe fixe  $Ox$ .

Ce corps constitue un système à liaisons complètes, indépendantes du temps; sa position dépend d'un seul paramètre, l'angle de rotation  $\theta$ . Le théorème des forces vives fournira l'unique équation du mouvement, débarrassée des liaisons (force vive =  $Mk^2 \omega^2$ ):

$$\frac{d}{dt} \frac{Mk^2 \omega^2}{2} = \sum (Xdx + Ydy + Zdz)$$

Dans le 2<sup>e</sup> membre ne figurent que les forces directement appliquées. Il peut se simplifier, puisque le seul déplacement possible est une rotation, ou bien a pour chaque point du corps:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta & y &= r \sin \theta & z &= \text{cte} \\ dx &= -y d\theta = -y \omega dt & dy &= x d\theta = x \omega dt & dz &= 0. \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{Mk^2 \omega^2}{2} = \omega dt \sum (xY - yX)$$

$$Mk^2 \frac{d\omega}{dt} = \sum (xY - yX)$$

Cette est l'équation du mouvement; elle est du 2<sup>e</sup> ordre en  $\theta$ .



On peut obtenir aussi en appliquant le théorème des moments des quantités de mouvement - Les forces extérieures sont les forces directement appliquées et les réactions de l'axe; mais les moments de ces réactions sont nuls; on a donc par ce théorème:

$$\frac{d}{dt} MK^2 \omega = MK^2 \frac{d\omega}{dt} = \Sigma (xY - yX)$$

En intégrant cette équation, on aura  $\theta$  en fonction du temps et de 2 constantes arbitraires, qu'on déterminera par les conditions initiales.

On peut calculer les pressions du corps sur l'axe, ou les réactions (égales et opposées) de l'axe sur le corps.

Pour préciser la question, supposons que l'axe soit déterminé par 2 points fixes,  $O, O'$ ; soit leur distance  $OO' = h$  sur  $Ox$ .

Soient  $Q(A, B, C)$  la réaction du pt.  $O$ ,  $Q'(A', B', C')$  celle du pt.  $O'$ .

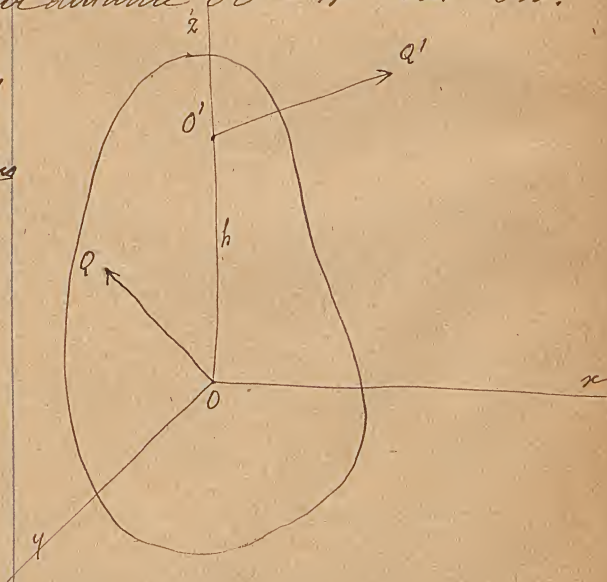
Appliquons le théorème des projections des quantités de mouvement sur les 3 axes; on doit faire figurer dans les seconds membres toutes les forces extérieures au corps:

$$\Sigma m \frac{d^2x}{dt^2} = A + A' + \Sigma X$$

$$\Sigma m \frac{d^2y}{dt^2} = B + B' + \Sigma Y$$

$$\Sigma m \frac{d^2z}{dt^2} = C + C' + \Sigma Z$$

Appliquons le théorème des moments des quantités de mouvement par rapport aux 3 axes; les 3 moments de  $Q$  sont nuls, et le moment de  $Q'$  par rapport à  $Ox$  est nul; on a donc les 3 équations:





$$\sum m \left( y \frac{d^2 z}{dt^2} - z \frac{d^2 y}{dt^2} \right) = \sum (yZ - zY) - hB'$$

$$\sum m \left( z \frac{d^2 x}{dt^2} - x \frac{d^2 z}{dt^2} \right) = \sum (zX - xZ) + hA'$$

$$\sum m \left( x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} \right) = \sum (xY - yX)$$

Cette dernière équation, qui ne contient pas les réactions, est l'équation du mouvement trouvée plus haut. On a ainsi 6 équations du mouvement; nous verrons plus tard qu'il ne peut y en avoir plus de 6 pour un corps solide libre (or nous considérons le corps comme libre, en lui appliquant les réactions  $Q$  et  $Q'$ .)

La 1<sup>re</sup> et la 5<sup>e</sup> déterminent  $A', B'$ ; puis la 1<sup>re</sup> et la 2<sup>e</sup> donnent  $A, B$ ; de la 3<sup>e</sup> on ne peut tirer que  $C + C'$ , les 2 composantes restant indéterminées. Ce résultat, déjà trouvé en statique (1<sup>er</sup> cahier, page 114.) tient à l'hypothèse d'un corps absolument rigide; en réalité, les pressions  $C$  et  $C'$  sont physiquement déterminées par les flexions du corps, qui mettent en jeu des forces d'élasticité.

Pour mettre en évidence la variable  $\theta$ , exprimons les dérivées de  $x, y, z$  en fonction de:

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega :$$

$$\frac{dx}{dt} = -\omega y$$

$$\frac{dy}{dt} = \omega x$$

$$\frac{dz}{dt} = 0.$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x - y \frac{d\omega}{dt}$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -\omega^2 y + x \frac{d\omega}{dt}$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = 0.$$

En portant ces expressions dans les 5 premières équations, elles deviennent:

$$-\omega^2 \sum m x - \frac{d\omega}{dt} \sum m y = A + A' + \sum X \quad -\omega^2 \sum m y x + \frac{d\omega}{dt} \sum m x x = \sum (yZ - zY) - hB'$$

$$-\omega^2 \sum m y + \frac{d\omega}{dt} \sum m x = B + B' + \sum Y \quad -\omega^2 \sum m x x - \frac{d\omega}{dt} \sum m y x = \sum (zX - xZ) + hA'$$

$$0 = C + C' + \sum Z$$

$$\left[ M k^2 \frac{d\omega}{dt} = \sum (xY - yX) \right]$$



Les sommes:  $\Sigma m x$ ,  $\Sigma m y$ ,  $\Sigma m x^2$ ,  $\Sigma m y^2$  qui figurent dans ces équations sont connues; elles varient en général quand le corps tourne. Les 2 premières varient comme les coordonnées du centre de gravité, car:

$$\Sigma m x = M \xi \quad \Sigma m y = M \eta$$

On peut évaluer les 2 dernières en rapportant les points du corps à des axes mobiles liés au corps lui-même; soient  $Ox'y'z'$ :

$$x = x' \cos \theta - y' \sin \theta \quad y = x' \sin \theta + y' \cos \theta \quad z = z' \quad \text{donc:}$$

$$\Sigma m x^2 = \cos^2 \theta \Sigma m x'^2 - \sin^2 \theta \Sigma m y'^2$$

$$\Sigma m y^2 = \sin^2 \theta \Sigma m x'^2 + \cos^2 \theta \Sigma m y'^2$$

$\Sigma m x'^2$ ,  $\Sigma m y'^2$  sont des constantes qu'on peut calculer. On voit que les 4 sommes considérées dépendent de  $\theta$ ; on aura donc les pressions  $A$ ,  $A'$  en fonction de l'angle de rotation —

Supposons que  $Ox$  soit un axe principal d'inertie du corps relatif au centre de gravité; on sait qu'il est alors axe principal par tous les points; on a donc:  $\Sigma m x = 0$   $\Sigma m y = 0$   $\Sigma m x^2 = 0$   $\Sigma m y^2 = 0$

Ainsi, quelle que soit la valeur de  $\theta$  ou de  $\omega$ , les 1<sup>ers</sup> membres des équations s'annulent, et l'on a simplement:

$$0 = A + A' + \Sigma X$$

$$0 = B + B' + \Sigma Y$$

$$0 = -hB' + \Sigma (yZ - zY)$$

$$0 = hA' + \Sigma (zX - xZ)$$

On voit que les équations qui déterminent les pressions sont les mêmes qu'en statique (par coh. p. 114.) — Les forces directement appliquées au corps peuvent être remplacées par leur résultante  $OR$  et un couple d'axe  $OG$ ; décomposons ce couple en  $OG'$  parallèle à  $Ox$  et  $OG''$  perpendiculaire à  $Ox$ ; s'il n'y avait que  $R$  et  $G''$ , le corps serait en équilibre, et exercerait



127

Sur les 2 points fixes  $O, O'$  certaines pressions déterminées par les équations précédentes - L'addition du couple  $OG'$  a pour effet de faire tourner le corps autour de  $Ox$ , mais les pressions sont les mêmes qu'au repos -  
 - Supposons que les forces appliquées au corps aient une résultante unique passant par le point  $O$ . L'équation du mouvement:

$$Mk^2 \frac{d\omega}{dt} = \Sigma (xY - yX) \quad \text{devient :}$$

$$Mk^2 \frac{d\omega}{dt} = 0 \quad \text{d'où :} \quad \omega = \omega_0$$

Le corps tourne autour de  $Ox$  avec une vitesse constante. Les termes en  $\frac{d\omega}{dt}$  disparaissent des équations, puisque  $\frac{d\omega}{dt} = 0$ .

Cherchons à quelles conditions le point  $O'$  ne supportera aucune pression - Il faut pour cela que:  $A' = 0, B' = 0, C' = 0$ .  
 Les 3 moments par rapport aux 3 axes étant nuls, on doit avoir:

$$\omega^2 \Sigma m y z = 0 \quad \omega^2 \Sigma m x z = 0$$

Dans, il faut et il suffit que:  $\Sigma m y z = 0 \quad \Sigma m x z = 0$   
 c'est à dire que  $Ox$  soit un principal d'inertie relatif au point  $O$ .

On peut alors supprimer le point  $O'$ ; d'où ce théorème:

Si un corps solide a un point fixe  $O$  et si les forces appliquées à ce corps ont une résultante unique passant par  $O$ , ce corps, lancé avec une vitesse angulaire initiale autour d'un axe principal d'inertie relatif au point  $O$  continuera à tourner autour de cet axe fixe avec une vitesse angulaire constante -

- Supposons que les forces appliquées au corps soient équivalentes à une résultante  $OR$  et à un couple  $OG$  dirigé suivant  $Ox$ . On aura encore:

$$\Sigma (yZ - zY) = 0 \quad \Sigma (xX - xZ) = 0$$



mais:  $\Sigma(xy - yx) \geq 0$  et par suite:  $\frac{dw}{dt} \geq 0$ .

Cherchons à quelles conditions le point  $O'$  ne supportera aucune pression. Pour qu' $A'$ ,  $B'$  soient nuls, il faudra qu'on ait:

$$\omega^2 \Sigma myz - \frac{dw}{dt} \Sigma mxz = 0 \quad - \omega^2 \Sigma mxz - \frac{dw}{dt} \Sigma myz = 0$$

Le déterminant de ces 2 équations:  $\left(\frac{dw}{dt}\right)^2 + \omega^4$

étant essentiellement positif, il faut que:

$$\Sigma mxz = 0$$

$$\Sigma myz = 0$$

On retrouve la même conclusion:  $Oz$  doit être axe principal d'inertie relatif au point  $O$ . D'où ce théorème:

Si un corps solide a un point fixe  $O$ , et si les forces appliquées à ce corps se réduisent à une résultante  $OR$  et à un couple  $OG$  dirigé suivant un des axes principaux d'inertie relatifs au point  $O$ , ce corps, lancé dans une rotation autour de cet axe continuera à tourner autour de ce même axe fixe, avec une vitesse angulaire variable.

Cette double propriété caractérise les axes principaux d'inertie relatifs au point fixe, qu'on appelle pour cette raison axes permanents de rotation.

Application: Pendule composé (étudié par Huyghens qui le premier a traité le problème du mouvement d'un système.)

Le pendule composé est un corps solide pesant, mobile autour d'un axe horizontal. Prenons pour plan de la figure le plan perpendiculaire à l'axe de suspension contenant le centre de gravité  $G$ .

Ce point décrit dans ce plan un cercle ayant  $O$  pour centre et pour rayon  $OG = L$ . L'angle  $GOx = \theta$  s'appelle angle d'écart.  
( $Ox$  verticale.)



L'équation du mouvement est :

$$Mk^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = -Mgl \sin\theta$$

ou :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{gl}{K^2} \sin\theta$$

d'où, en intégrant :

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{2gl}{K^2} \cos(\theta - \alpha)$$

C'est le même résultat que pour le pendule simple (v. page 27) d'où l'équation est :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l'} \sin\theta$$

Pour identifier les 2 équations, il suffirait de faire :

$$\begin{cases} l = l' \\ K^2 = l'^2 \end{cases}$$

cà-d. de poser :

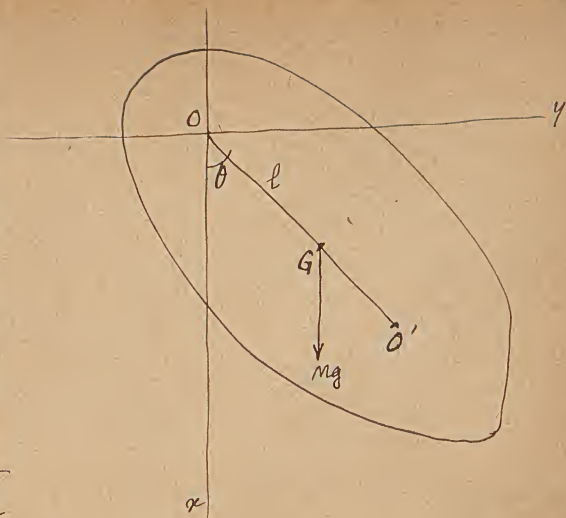
$$l' = \frac{K^2}{l}$$

Le mouvement du pendule composé est donc identique (les conditions initiales étant supposées les mêmes) à celui d'un pendule simple de longueur  $l'$ , qu'on appelle le pendule simple synchrone du pendule proposé (~~leur masses étant égales~~).

Portons sur  $OG$  la longueur  $OO' = l'$ . Le point  $O'$  oscille dans le mouvement du corps solide comme un point matériel <sup>libre</sup> suspendu <sup>à l'axe</sup> c'à-d. comme un pendule simple ; il en est de même de tous les points de la droite menée par  $O'$  parallèlement à l'axe de suspension ; on l'appelle axe d'oscillation.

La longueur  $OO'$  est toujours plus grande que  $OG$ , en vertu du théorème des moments d'inertie. Soit en effet  $Mp^2$  le moment d'inertie du corps par rapport à un axe passant par  $G$  et parallèle à l'axe d'oscillation ; on a :

$$Mk^2 = Mp^2 + Ml^2$$





$$K^2 = p^2 + l^2, \quad l' = \frac{p^2 + l^2}{l} = l + \frac{p^2}{l}, \quad OG = \frac{p^2}{l}$$

$p$  étant une quantité constante, on voit que l'axe de suspension et l'axe d'oscillation sont réciproques:  $OG \cdot O'G = p^2$ .

La formule précédente:

$$l' = l + \frac{p^2}{l}$$

permet d'étudier la variation du mouvement oscillatoire quand l'axe de suspension se déplace dans le corps parallèlement à une même direction  $\sim p$  reste constante. Le minimum de  $l'$  a lieu pour:

$$l = p$$

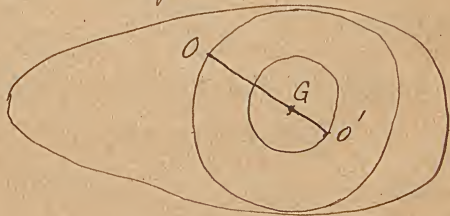
$$\text{c'est: } l' = 2p.$$

Le lieu des axes correspondant à ce minimum est un cylindre de révolution ayant pour axe l'axe passant par  $G$  et parallèle à la direction donnée, et pour rayon le rayon de giration  $p$  du corps par rapport à cet axe. — La longueur minima du pendule simple synchrone correspond le minimum de la durée d'une oscillation —

Si l'on se donne à l'avance la durée de l'oscillation, ou qu'on assigne à la longueur du pendule simple synchrone une valeur  $l' > 2p$ , on trouve pour  $l$  2 solutions distinctes.

Le lieu des axes de suspension parallèles à la direction donnée pour lesquels le pendule simple synchrone a une longueur donnée se compose de 2 cylindres de révolution ayant pour centre  $G$  —

Le produit de leurs rayons est égal à  $p^2$ . — Les axes de suspension et d'oscillation correspondants sont diamétralement opposés sur les 2 cylindres.





Théorème. Si l'on a dans un plan passant par le centre de gravité, et à des distances inégales de part et d'autre de ce point, 2 axes parallèles de suspension pour lesquels la longueur du pendule simple synchrone soit la même, cette longueur est égale à leur distance.

Soient  $l_1, l_2$  les distances de ces 2 axes au centre de gravité :  
 $l'$  la longueur inconnue du pendule simple synchrone; on a:

$$l' = l_1 + \frac{p^2}{l_1} \quad l' = l_2 + \frac{p^2}{l_2} \quad l_1 + \frac{p^2}{l_1} = l_2 + \frac{p^2}{l_2}$$

Cette équation admet 2 solutions: la 1<sup>re</sup>:  $l_1 = l_2$   
 est exclue par l'hypothèse; reste la 2<sup>e</sup>:  $l_1 = \frac{p^2}{l_2}$   
 qui exprime que les 2 axes sont réciproques.

Comme ils sont de part et d'autre du centre de gravité, ils se trouvent diamétralement opposés, et l'on a:  $l' = l_1 + l_2$ .

Le pendule réversible de Kater est une application de ce théorème: il se compose de 2 masses inégales mais de même forme (pour égaliser la résistance de l'air) reliées par un étige rigide qui porte 2 centres opposés par leurs arêtes et dont la distance est connue par construction.

Le centre de gravité se trouve à des distances inégales des 2 axes de suspension. Des curseurs permettent de rendre égaux les durées des oscillations autour de ces 2 axes. Ils sont alors réciproques, et leur distance





est la longueur du pendule simple synchrone. On connaît cette longueur  $l$ , on mesure expérimentalement la durée  $t$  d'une oscillation, et la formule:

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

permet de calculer  $g$ .

Problème. Étant donné un corps solide, calculer la longueur du pendule simple synchrone correspondant à un axe de suspension donné.

Prends pour axes coordonnés les axes principaux d'inertie relatifs au centre de gravité: Soient:  $A = Ma^2$   $B = Mb^2$   $C = Mc^2$  les 3 moments principaux d'inertie du corps. On définira la position de l'axe de suspension donné par la distance  $l$  au centre de gravité, et ses cosinus directeurs  $\alpha, \beta, \gamma$ . Soit  $mp^2$  le moment d'inertie du corps par rapport à un axe parallèle au précédent et passant par G. L'équation de l'ellipsoïde d'inertie est:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$$

et l'on a:

$$mp^2 = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2$$

ou:

$$p^2 = a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + c^2\gamma^2$$

On calculera la longueur du pendule simple synchrone par la formule:

$$l' = l + \frac{p^2}{l} = l + \frac{a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + c^2\gamma^2}{l}$$

Si l'on cherche le lieu des axes pour lesquels la longueur du pendule simple synchrone est la même, on trouve un complexe du 4<sup>e</sup> ordre.

Le lieu de ceux de ces axes qui sont parallèles à une même direction est, nous l'avons vu, l'ensemble de 2 cylindres du 2<sup>e</sup> degré de centre G. Le lieu de ceux de ces axes qui passent par un même point donné



est un cône du  $n^{\text{e}}$  degré.

— Mouvement d'une chaîne homogène pesante sur une courbe fixe.  
Soit  $AB$  la chaîne, de longueur  $2l$ ; soit  $\rho$  la masse de l'unité de longueur; la masse totale est:  $M = 2l\rho$

Menons 3 axes rectangulaires  $Oxyx$ ,  $Ox$  vertical vers le haut. La courbe fixe est déterminée par ses 3 coordonnées définies en fonction de son arc  $s$ . La chaîne forme un système à liaisons complètes; sa position dépend d'un seul paramètre; la distance curviligne d'un de ses points, par exemple de son milieu  $C$  à un point fixe de la courbe,  $O'$ :

posons:  $O'C = \sigma$

d'où:  $OA = \sigma - l$   $OB = \sigma + l$

Les forces de liaison sont les actions mutuelles des éléments de la chaîne (forces intérieures) et les réactions normales (pas de frottement) de la courbe sur la chaîne (forces extérieures).

Appliquons le théorème des forces vives, pour n'avoir pas à tenir compte des liaisons. Le point  $C$  a pour vitesse  $\frac{ds}{dt}$ ; ce sera aussi la vitesse de tous les points de la chaîne. Un élément de masse  $m$  aura pour force vive  $m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$ ;

La force vive totale sera:

$$\sum m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 2l\rho\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$$

Pour calculer la somme des travaux des forces extérieures, c-à-d. du poids, décomposons la chaîne en éléments infiniment petits de longueur égale  $ds$ ; Soient  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$  les cotes des points de division,  $x_0$  et  $x'$  celles des extrémités  $A$  et  $B$ . L'élément  $(x_0, x_1)$





a pour masse  $\rho ds$ , pour poids  $g\rho ds$ ; ce poids peut être appliqué en un point quelconque de l'élément, par exemple au point  $z_0$ .

De même le poids de l'élément suivant est  $g\rho ds$  appliqué en  $z_1$ , et ainsi de suite; le poids du dernier élément  $(z_{n-1}, z')$  est toujours  $g\rho ds$  appliqué en  $z_{n-1}$ . — Quand la chaîne éprouve le déplacement infiniment petit  $ds$ , le point  $z_0$  ~~devient~~ <sup>vient en</sup>  $z_1$ ,  $z_1$  en  $z_2$ , ...,  $z_{n-1}$  en  $z'$ ; les travaux élémentaires des forces extérieures sont donc:

$$g\rho ds(z_0 - z_1), g\rho ds(z_1 - z_2), \dots, g\rho ds(z_{n-1} - z')$$

Leur somme est:  $g\rho ds(z_0 - z')$

D'où cette conclusion immédiate:

La somme des travaux élémentaires du poids de la chaîne dans un déplacement total  $ds$  est égale au travail élémentaire du poids d'un élément linéaire  $ds$  qu'on déplacerait d'un bout à l'autre de la chaîne. — Ce résultat est d'ailleurs évident; faire glisser toute la chaîne de sa position  $AB$  à sa position  $A'B'$  équivaut à transporter le segment  $AA'$  en  $BB'$ .

L'équation du force vives est donc:

$$d\left[l\rho\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\right] = g\rho ds(z_0 - z')$$

On a par hypothèse:  $z = \varphi(s)$   $s$  étant l'arc compté à partir de  $O'$  sur la courbe, donc:  $z_0 = \varphi(s-l)$   $z' = \varphi(s+l)$

$$d\left[l\rho\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\right] = g\rho ds[\varphi(s-l) - \varphi(s+l)]$$

ou:  $\frac{ds}{dt^2} = \frac{g}{2l}[\varphi(s-l) - \varphi(s+l)]$

C'est l'équation du mouvement du point  $C$  sur la courbe. C'est l'équation d'un mouvement rectiligne (qu'on obtiendrait en rectifiant la cbe.)



Étudions le cas le plus simple, où :  $z = ks$   
 celui où la courbe donnée est une hélice, les arcs étant comptés  
 à partir du plan horizontal des  $xy$  (cas particulier : une droite.)  
 $z_0 - z' = k(\sigma - l) - k(\sigma + l) = -2kl$  L'équation devient :

$$\frac{d^2\sigma}{dt^2} = \frac{g}{2l}(-2kl) = -kg$$

Le mouvement est uniformément accéléré comme dans une  
 chute libre, avec cette différence que la pesanteur est multipliée  
 par le facteur  $k \leq 1$  : la chute est donc retardée. De plus,  
 le mouvement est indépendant de la longueur de la chaîne.

Cela est encore vrai pour le cas :  $z = \frac{s^2}{8R}$   
 où la courbe est une cycloïde, ou le résultat  
 du roulement d'une cycloïde sur un cylindre de génératrice  
 verticale, rapportée à son point le plus bas comme origine des arcs.  
 $z_0 - z' = \frac{(\sigma - l)^2}{8R} - \frac{(\sigma + l)^2}{8R} = \frac{-4l\sigma}{8R} = -\frac{l\sigma}{2R}$

L'équation devient :  $\frac{d^2\sigma}{dt^2} = \frac{g}{2l}\left(-\frac{l\sigma}{2R}\right) = -\frac{g\sigma}{4R}$

Elle est encore indépendante de la longueur.

Le point C se meut donc comme un point matériel isolé  
 glissant sans frottement sur la cycloïde ; son mouvement est donc  
 celui d'un pendule cycloïdal ; il est tautochrone et brachistochrone  
 (Puisseux)

On peut démontrer que les 2 cas précédents sont les seuls où le  
 mouvement soit indépendant de  $l$ . En effet, pour qu'il en soit ainsi,  
 il faut qu'on ait :  $\frac{\varphi(\sigma - l) - \varphi(\sigma + l)}{l} = \psi(\sigma)$



$\psi$  étant indépendante de  $\ell$ , on:  $\varphi(\sigma-\ell) - \varphi(\sigma+\ell) = \ell \psi(\sigma)$   
 quelque soit  $\ell$ . Prenons les dérivées secondes par rapport à  $\ell$ :  
 on doit avoir identiquement:  $\varphi''(\sigma-\ell) - \varphi''(\sigma+\ell) = 0$

(Or  $\sigma$  et  $\ell$  étant des variables indépendantes,  $(\sigma-\ell)$  et  $(\sigma+\ell)$   
 peuvent prendre toutes les valeurs possibles; et faut donc qu'on  
 ait:  $\varphi''(x) = \varphi''(y)$  quels que soient  $x$  et  $y$ ,

cà d:  $\varphi'' = C^{te}$

Distinguons 2 cas:

Si  $C^{te} = 0$ ,  $\varphi''(x) = 0$   $\varphi'(x) = k$   $\varphi(x) = kx + C$

C'est l'équation d'une droite:  $x = kx + C$

ou d'une hélice enroulée sur un cylindre vertical:  $x = ks + C$

Si  $C^{te} \neq 0$ ,  $\varphi''(x) = C$   $\varphi'(x) = C(x-x_0)$   $\varphi(x) = \frac{C}{2}(x-x_0)^2 + C'$

C'est l'équation d'une cycloïde:  $x - x_0 = \frac{C}{2}(x - x_0)^2$

ou, par un changement d'axes convenable:  $x = \frac{C}{2} x^2$

C'est aussi une courbe quelconque obtenue en enroulant cette  
 cycloïde sur un cylindre vertical:  $x = \frac{C}{2} s^2$

On retrouve les 2 cas étudiés ci-dessus, et ceux-là seulement

Dans le cas d'une circonférence située dans un plan vertical,  
 on retrouve l'équation du pendule simple à un facteur près:

$$\frac{d^2\sigma}{dt^2} = -\frac{g}{\ell} R \cos \frac{\sigma}{R} \sin \frac{\ell}{R} \quad \text{ou:} \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{\ell} \sin \theta \sin \alpha$$

en posant:  $\frac{\pi}{2} - \theta = \frac{\sigma}{R}$   $\alpha = \frac{\ell}{R}$   $\theta$  angle d'Ecart.

La longueur du pendule simple synchrone est:  $\ell' = \frac{\ell}{\sin \alpha}$

On arriverait au même résultat en considérant la chaîne comme  
 un pendule composé; en effet, comme elle garde une forme invariable,



on peut la solidifier et la supposer invariablement liée au pt. O centre de la circonférence. Son rayon de giration  $K = R$  ; la distance OG de son centre de gravité à l'axe de suspension est :

$$\frac{R}{L} \sin \frac{L}{R} \quad \left( \text{par la formule: } \bar{x} = \int x ds \right)$$

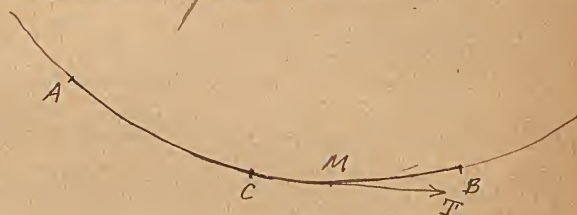
La longueur du pendule simple équivalent est donc :

$$l' = \frac{Rl}{\sin \frac{l}{R}}$$

Dans le cas particulier où la chaîne aurait la même longueur que la circonférence, son mouvement serait évidemment uniforme.

— Calcul de la tension — Considérons un point M de la chaîne, et soit  $\lambda$  l'arc CM. La

partie AM de la chaîne se meut comme si, la partie MB étant supprimée, la tension T était appliquée tangentielle ment en M.



Soit  $x$  la cote du point M :  $x = \varphi(\sigma + \lambda)$

Le théorème des forces vives donne alors :

$$d \left[ \frac{l+\lambda}{2} \rho \left( \frac{d\sigma}{dt} \right)^2 \right] = T d\sigma + g\rho d\sigma [ \varphi(\sigma-l) - \varphi(\sigma+\lambda) ]$$

ou :  $(l+\lambda) \rho \frac{d^2\sigma}{dt^2} = T + g\rho [ \varphi(\sigma-l) - \varphi(\sigma+\lambda) ]$

On remplacera  $\frac{d^2\sigma}{dt^2}$  par la valeur trouvée plus haut, et l'on aura T en fonction de  $\sigma$  et de  $\lambda$ . Comme vérification, en faisant  $\lambda = \pm l$ , on devra trouver :  $T = 0$ .

Dans le cas où la courbe est une hélice, la tension est nulle dans



toute la chaîne: chaque élément se meut donc comme un point matériel libre.

Si l'on a une chaîne matérielle proprement dite, n'offrant pas de résistance au tassement des chaînons, la valeur de la tension devra être positive ou nulle. Si on a une chaîne articulée composée d'éléments rigides, la tension pourra être négative.

— Mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe. Nous étudions d'abord le cas limite où le point fixe serait à l'infini, c'est le mouvement d'un corps solide assujéti à se déplacer parallèlement à un plan fixe.

Toutes les sections parallèles au plan fixe pratiquées dans le corps se déplacent dans leur plan; ~~en particulier~~, le mouvement pourra être représenté par le mouvement d'une figure invariable dans un plan parallèle au plan fixe, le corps étant invariablement lié à cette figure; on pourra prendre en particulier pour cette figure la section parallèle menée par le centre de gravité, et son plan pour plan des  $xy$ . Le problème est ramené au mouvement d'une figure plane dans son plan. — Par exemple, le mouvement d'un cylindre se déplaçant perpendiculairement à ses génératrices sera représenté par le mouvement de sa section droite dans un plan fixe.

La position de la figure plane dans un plan invariable dépend de 3 paramètres: les coordonnées  $\xi, \eta$  du centre de gravité  $G$ , et l'angle  $\theta$  que fait une droite  $GA$  invariable dans la figure avec l'axe  $Ox$ , et que déterminent son orientation.

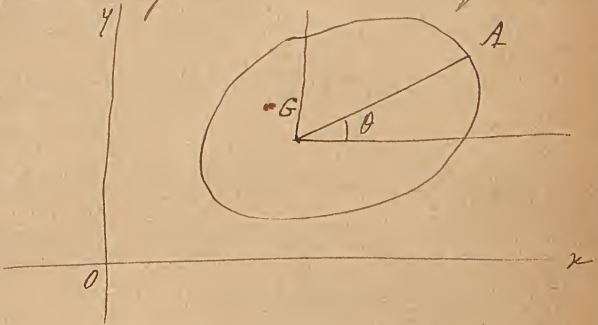
Le corps est sollicité par des forces données dans l'espace;



mais leurs composantes perpendiculaires au plan fixe sont annulées par la réaction du plan, de sorte qu'il n'y a à tenir compte que des composantes parallèles au plan; elles se projettent d'ailleurs en vraie grandeur, de sorte qu'on peut les y supposer situées. Le théorème du mouvement du centre de gravité donne l'équation:

$$M \frac{d^2 \xi}{dt^2} = \sum X \quad M \frac{d^2 \eta}{dt^2} = \sum Y$$

Les moments des forces par rapport à  $Ox$  (perpendiculaire au plan de la figure) sont les moments du projeté des forces par rapport au point  $O$  du plan qui les contient.



Le théorème des moments des quantités de mouvement donne:

$$\frac{d}{dt} \left[ M \left( \xi \frac{d\eta}{dt} - \eta \frac{d\xi}{dt} \right) + M k^2 \frac{d\theta}{dt} \right] = \sum (xY - yX)$$

Ces 3 équations définissent  $\xi, \eta, \theta$  en fonction du temps.

On peut remplacer la dernière par une équation plus simple en appliquant le même théorème au mouvement relatif de la figure par rapport à des axes parallèles aux axes fixes menés par  $G$ : on obtient l'équation:

$$M k^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} = \sum (x'Y - y'X)$$

on l'on a:  $x' = x - \xi$   $y' = y - \eta$

On peut encore remplacer une des 3 équations par l'équation des forces vives, qui en est une conséquence. En la prenant d'abord par rapport aux axes fixes, on trouve:

$$d \left[ \frac{M}{2} \left\{ \left( \frac{d\xi}{dt} \right)^2 + \left( \frac{d\eta}{dt} \right)^2 \right\} + \frac{M k^2}{2} \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] = \sum (X dx + Y dy)$$



En la prenant par rapport aux axes mobiles, c'est en appliquant le théorème des forces vives au mouvement autour du centre de gravité, on trouve:

$$d\left[\frac{Mk^2}{2}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] = \sum (X dx' + Y dy')$$

S'il y a d'autres liaisons, on devra éliminer les forces de liaison entre les 3 équations distinctes qu'on aura choisies.

Étudions le cas le plus simple, celui d'une plaque pesante lancée dans un plan vertical (plus généralement, celui d'un corps pesant assujéti à se mouvoir parallèlement à un plan vertical.)

La seule force directement appliquée étant le poids, on a pour le mouvement du centre de gravité les équations:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = 0$$

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = -g$$

mouvement d'un point matériel pesant libre: le centre de gravité décrit une parabole d'axe vertical. Le théorème des moments des quantités de mouvement appliqué au mouvement relatif autour du centre de gravité donne:

$$Mk^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = 0$$

ou:  $\frac{d\theta}{dt} = C^te$

Le corps tourne autour de son centre de gravité avec une vitesse angulaire constante, égale à la vitesse angulaire initiale. Si on le lance sans vitesse angulaire initiale, son mouvement sera une translation parabolique.

Problème Trouver le mouvement dans le plan des  $xy$ , de 2 points A et B de même masse, liés par une tige sans masse et attirés par force  $Ox$  proportionnellement à la distance.

Les forces extérieures sont:

$$Y = -mxy \quad Y_1 = -m_1y_1$$



Les coordonnées du centre de gravité  $G$  sont:

$$\xi = \frac{x+x_1}{2} \quad \eta = \frac{y+y_1}{2}$$

Les équations du mouvement du centre de gravité sont:

$$2m \frac{d^2\xi}{dt^2} = 0 \quad 2m \frac{d^2\eta}{dt^2} = Y+Y_1 = -m\mu(y+y_1) = -2m\mu\eta.$$

ou simplement:  $\frac{d^2\xi}{dt^2} = 0 \quad \frac{d^2\eta}{dt^2} = -\mu\eta.$

en intégrant:  $\frac{d\xi}{dt} = C^{te} \quad \xi = at$

on annule la constante d'intégration en choisissant pour  $Oy$  l'ordonnée de  $G$  à l'instant initial:  $\xi=0$  pour  $t=0$ .

Ainsi  $G'$  se meut sur  $Ox$  d'un mouvement uniforme.

Intégrons la 2<sup>e</sup> équation:  $\frac{d^2\eta}{dt^2} + \mu\eta = 0$

$$\eta = A \cos t\sqrt{\mu} + B \sin t\sqrt{\mu} = A \sin(t\sqrt{\mu} + \alpha)$$

Pour avoir la trajectoire de  $G$ , éliminons  $t$  entre les 2 équations:

$$\eta = A \sin\left(\frac{\xi\sqrt{\mu}}{a} + \alpha\right)$$

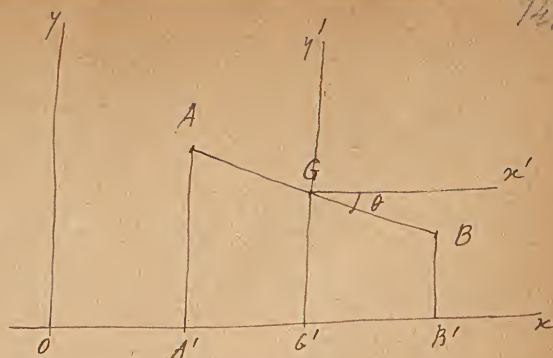
C'est une sinusoïde.

Pour connaître le mouvement du système autour de son centre de gravité, appliquons le théorème des moments des quantités de mouvement aux axes mobiles  $Gx'y'$  parallèles aux axes fixes.

Preons:  $B\hat{G}x' = 0 \quad AB = 2l.$

Le moment d'inertie du système par rapport à  $G$  est  $2ml^2$ .

La somme des moments des quantités de mouvement par rapport à  $G$  est donc:  $2ml^2 \frac{d\theta}{dt}$ ; sa dérivée:  $2ml^2 \frac{d^2\theta}{dt^2}$ .





D'autre part, la somme des moments des forces extérieures par rapport à G est:  $\Sigma(x'Y - y'X) = x'Y + x'_1Y_1$

c'est:  $m\mu(y - y_1)x' = -m\mu l \sin \theta \cdot l \cos \theta = -2m\mu l^2 \sin \theta \cos \theta$

D'où l'équation:  $2m\mu l^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = -2m\mu l^2 \sin \theta \cos \theta$

ou:  $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\mu \sin \theta \cos \theta = -\frac{\mu}{2} \sin 2\theta$

Posons:  $\theta' = 2\theta$   $\frac{d^2\theta'}{dt^2} = -\mu \sin \theta'$

équation semblable à celle du pendule simple. On achèvera l'intégration au moyen des fonctions elliptiques. On trouverait une intégrale première en appliquant le théorème des forces vives.

Le mouvement relatif du système autour de son centre est un mouvement pendulaire, de rotation ou d'oscillation.

On trouverait aisément la formule des oscillations infiniment petites, qui sont isochrones. Si l'on abandonne la barre sans vitesse angulaire initiale avec  $\theta$  infiniment petit, elle exécutera des oscillations infiniment petites autour de  $Gx'$ . La position:  $\theta = 0$  est donc une position d'équilibre relatif. Le mouvement se réduit alors à une translation, la barre étant constamment parallèle à  $Ox$ .

Problème. Supposons qu'une circonférence fixe située dans un plan vertical, on place un disque homogène pesant assujéti à rester en contact sans frottement avec la circonférence; on demande son mouvement.

Prends pour axes issus du centre de la circonférence fixe  $Oy$  horizontal,  $Ox$  vertical dirigé en bas. Soit  $C$  le centre du disque; on a constamment:  $OC = R - r$ .



La position du disque dépend de 2 paramètres: l'angle  $\widehat{COx} = \alpha$ , et l'angle de CA, rayon fixe du disque, avec Ox ou Cx' parallèle à Ox:  $\widehat{ACx'} = \theta$ .

Les forces extérieures au disque sont: son poids  $Mg$  appliqué en C, et la réaction normale  $N$  de la circonférence fixe, appliquée au point de contact et passant par C. Appliquons le théorème des moments des quantités de mouvement par rapport à O: le moment de  $N$  est nul, donc:

$$\frac{d}{dt} \left[ M(R-z)^2 \frac{d\alpha}{dt} + Mk^2 \frac{d\theta}{dt} \right] = -Mg(R-z) \sin \alpha$$

Appliquons le même théorème par rapport à C; les moments des 2 forces sont nuls, et on a l'équation plus simple:

$$\frac{d}{dt} \left( Mk^2 \frac{d\theta}{dt} \right) = 0 \quad \text{d'où:} \quad \frac{d\theta}{dt} = C^{te}$$

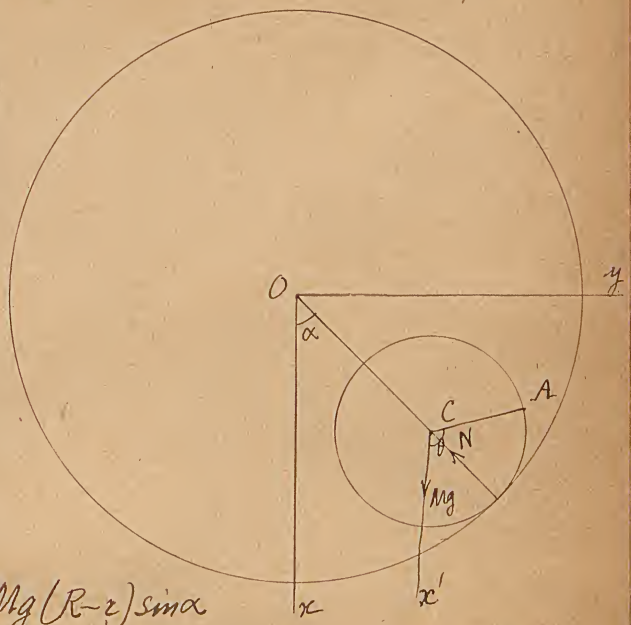
La vitesse angulaire du disque autour de son centre est donc égale à la vitesse angulaire initiale. Si on le abandonne sans lui imprimer de vitesse angulaire, il glissera parallèlement à lui-même, et son mouvement sera une translation.

La 1<sup>re</sup> équation se simplifie, en regard à la 2<sup>e</sup>:

$$\frac{d}{dt} \left[ M(R-z)^2 \frac{d\alpha}{dt} \right] = -Mg(R-z) \sin \alpha$$

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} = -\frac{g}{R-z} \sin \alpha$$

équation du pendule simple de longueur:  $l = R - z = OC$





144

Le centre  $C$  du disque oscille donc autour de  $O$  comme un pendule













